

Lösningar till tentamen i kurs SF1617/5B1131 Matematiska metoder II, för S 100824.

Linjär algebra

1. Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow T^{-1}$ existerar.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(2,5) = (3,-1).$$

2. Matrisen ges av $[T] = [T_3][T_2][T_1]$ där $[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $[T_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ och

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Matrimultiplikation ger } [T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

3. Vi diagonaliserar A : Karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -(5+\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+5)+18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, 1. \quad \text{Egenvektorer söks:}$$

$$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

Vi väljer $t = 1$ i båda fallen och får

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Då är } P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Ur detta fås}$$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^7 = PD^7P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^7 & 0 \\ 0 & 1^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 258 \\ -129 & -258 \end{bmatrix}.$$

4. S är linjärt oberoende mängd om

$$C_1 A \bar{v}_1 + C_2 A \bar{v}_2 + \dots + C_n A \bar{v}_n = \bar{0} \Rightarrow C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \text{ Ekvationen kan skrivas}$$

$$A(C_1 \bar{v}_1 + C_2 \bar{v}_2 + \dots + C_n \bar{v}_n) = \bar{0}. \text{ Multiplikation med } A^{-1} \text{ från vänster ger}$$

$$C_1 \bar{v}_1 + C_2 \bar{v}_2 + \dots + C_n \bar{v}_n = A^{-1} \bar{0} = \bar{0}. \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \} \text{ linjärt oberoende mängd ger att } C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ och beviset är klart.}$$

Flervariabelanalys

5. Vi provar att gå in mot origo längs x -axeln:

$y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Vi går in längs linjen $y = x$:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$. Eftersom dessa två vägar in mot origo ger olika resultat existerar inte gränsvärdet.

6. Riktningderivatan ges av $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$ där $\|\vec{u}\| = 1$. Denna är störst då $\vec{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

$$\nabla f = \left(\frac{1}{1+(x+y)^2} + ye^{xy}, \frac{1}{1+(x+y)^2} + xe^{xy} \right) \Rightarrow \nabla f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right). \text{ Det ger } \vec{u} = \frac{(1,3)}{\sqrt{10}}.$$

7. $F_1 = x^2 + y$, $F_2 = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Det ger att fältet är konservativt.

Vi kan då byta väg och väljer den räta linjen mellan origo och punkten $(-1, 2)$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = -2dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^{-1} (t^2 - 2t + (t + 4t^2)(-2)) dt = - \int_0^{-1} (7t^2 + 4t) dt = \frac{1}{3}.$$

Man kan också använda potentialen $\phi(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy$: $\phi(-1, 2) - \phi(0, 0) = \frac{1}{3}$.

8. Divergenssatsen: $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \text{div} \vec{F} dx dy dz$ där K är det inneslutna området.

$\text{div}(xy + z, y - y^2, x + yz) = y + 1 - 2y + y = 1$. Det gör att flödet ges av K 's volym V .

Ytorna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$ Kurvans projektion på xy -planet

fås genom att eliminera z ur systemet vilket ger $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 + y^2$ dvs en cirkel med ekvationen $x^2 + y^2 = 4$. Låt D vara området innanför denna cirkel. Då gäller att

$$V = \iint_D (8 - x^2 + y^2 - (x^2 + 3y^2)) dx dy = 2 \iint_D (4 - (x^2 + y^2)) dx dy. \text{ Polära koordinater ger}$$

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 4\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 16\pi.$$

9. Den övre delen av konen (där $z \geq 0$) är funktionsytan $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Projektionen på xy -planet av ytstycket i fråga är det obegränsade området

$0 \leq x \leq \frac{1}{x^2}$, $x \geq 3$. Arean ges då av den generaliserade integralen

$$\int_3^{\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + 1} dy = \int_3^{\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} dy =$$

$$= \int_3^{\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \sqrt{2} dy = \sqrt{2} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \sqrt{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_3^R = \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

10. Vi definierar $F(x, y, z, u) = z^2 + zu - u^2 - x$ och $G(x, y, z, u) = 2zu + u^2 - y$. Den givna punkten uppfyller då systemet $\begin{cases} F(x, y, z, u) = 0 \\ G(x, y, z, u) = 0 \end{cases}$. Vi beräknar Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)} = \begin{bmatrix} 2z + u & z - 2u \\ 2u & 2z + 2u \end{bmatrix} \text{ som i den givna punkten är } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Då dess determinant}$$

är $14 \neq 0$ är existensen av de två funktionerna klar enligt "implicita funktionssatsen". De båda sökta derivatorna kan fås genom implicit derivering map x resp y i systemet ovan. Detta kan göras var för sig eller på matrisnivå:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)} \frac{\partial(z, u)}{\partial(x, y)} = O \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z + u & z - 2u \\ 2u & 2z + 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{I den givna punkten fås } \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ vilket ger}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{7} \text{ och } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{14}.$$