KTH Matematik

Tentamen i kurserna SF1617 och 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Onsdagen den 13 januari 2010 kl 0800-1300.

För dem som sedan tidigare har godkänt resultat på linjäralgebradelen (TenA) krävs minst 9 poäng på flervariabelanalysdelen för betyg E på hela kursen.
För dem som sedan tidigare har godkänt resultat på flervariabelanalysdelen (TenB) krävs minst 6 poäng på linjäralgebradelen för betyg E på hela kursen.
För dem som sedan tidigare inte har godkänt resultat på någon del krävs minst 15 poäng för betyg E.
De som uppnår 13 eller 14 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 19, 23, 27 resp 31 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Linjär algebra

1. Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ vara standardbasen i $\mathbf{R}^3$ och betrakta vektorerna $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 + a\bar{e}_2$, $\bar{u}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + a\bar{e}_3$, $\bar{u}_3 = \bar{e}_1 + a\bar{e}_2 + \bar{e}_3$. För vilka värden på konstanten a utgör $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ en bas i $\mathbf{R}^3$? Bestäm koordinatvektorn för vektorn $(1,1,1)$ i den bas där $a = 2$. (3p)

2. Utför en ortogonal diagonalisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Ange den matris som diagonaliserar A och den diagonala matrisen. (3p)

3. Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Är matrisen diagonaliserbar? (4p)

4. En linjär operator $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uppfyller att $T(1,0) = (2,1)$ och $T(0,1) = (-3,-1)$. Bestäm bilden av linjen $2x + y - 3 = 0$. (4p)

Flervariabelanalys

5. Beräkna riktningsderivatan i punkten $(1,2)$ av funktionen $f(x,y) = \dfrac{2x - y}{3y - 5x}$ i riktning mot punkten $(4,-2)$. Ange även det maximala värde som riktningsderivatan i punken $(1,2)$ kan anta. (3p)

VGV

6. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = x - 2y + x^3 + 2xy - 2y^2$ och avgör deras karaktär. (3p)

7. Beräkna linjeintegralen $\int_C (x + \frac{y}{2} + 3)\,dx + (\frac{x}{2} + y + 5)dy$ där C är den kurva som sammansätts av den i övre halvplanet belägna bågen av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ från punkten (-2,0) till punkten (2,0) och räta linjen därifrån till punkten (-2,-4) . (3p)

8. Beräkna det kortaste avståndet från origo till ytan $z = xy + 3$. (4p)

9. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (x^2 y, y + z, x^2 - yz)$ upp genom den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ för vilken $z \geq 0$. (4p)

10. Visa att det finns funktioner $x = x(z)$ och $y = y(z)$ som i en omgivning av punkten $(0,1,2)$ satisfierar ekvationssystemet
$\begin{cases} x^4 + y^4 + 4z = 9 \\ x + 3y \quad + 2z = 7 \end{cases}$. Beräkna $x'(2)$. (4p)