Lösningar till tentamen i kurs SF1617/5B1131 Matematiska metoder II, för S 100113.

Linjär algebra

1. Vi beräknar determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1-a$. Detta visar att vektorerna duger som bas för $a \neq 1$. Låt koordinatvektorn ges av (a,b,c). Då skall gälla att $a(1,2,0)+b(1,1,2)+c(1,2,1)=(1,1,1)$. Detta ger systemet
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Ur detta fås koordinatvektorn $(a,b,c)=(1,1,-1)$.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-5)-4 = \lambda^2-7\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda = 1,6.$$
$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t,\ -\infty < t < +\infty$

$\lambda = 6: \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t,\ -\infty < t < +\infty$. Vi väljer $t=1$ och normerar. En matris som diagonaliserar A ortogonalt är $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ som ger diagonalmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda = -2,1,1.$$ Egenvektorerna fås:
$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t,\ -\infty < t < +\infty$.

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Det ger egenvektorerna

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$, $-\infty < s, t < +\infty$. Då matrisen har tre linjärt oberoende egenvektorer är den diagonaliserbar.

4. Avbildningens matris är $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Linjen har parameterekv $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$.

Bildmängden ges av $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} t$.

Bilden är alltså linjen $\begin{cases} x = -9 + 8t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$. Genom att eliminera parametern t fås ekvationen

$3x - 8y + 3 = 0$.

Flervariabelanalys

5. Riktningsderivatan av f i punkten P i riktningen $\bar{u}$ ges av $D_{\bar{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \bar{u}$ där $\bar{u}$ är en enhetsvektor. Vi får $\nabla f = (\frac{y}{(3y - 5x)^2}, -\frac{x}{(3y - 5x)^2})$. Riktningsvektorn ges av $(4,-2) - (1,2) = (3,-4)$ dvs $\bar{u} = \frac{1}{5}(3,-4)$. Detta ger $D_{\bar{u}} f(1,2) = (2,-1) \cdot (3,-4)/5 = 2$.
   Det maximala värdet är $\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{5}$.

6. De kritiska punkterna fås ur systemet

$\begin{cases} f_1 = 1 + 3x^2 + 2y = 0 \quad (1) \\ f_2 = -2 + 2x - 4y = 0 \quad (2) \end{cases}$ $2(1) + (2) \Rightarrow 6x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, -\frac{1}{3}$. Insättning i (2)

ger punkterna $(0, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Vi undersöker karaktären:

$A = f_{11} = 6x$, $B = f_{12} = 2$, $C = f_{22} = -4 \Rightarrow D = AC - B^2 = -24x - 4$.

$(0, -\frac{1}{2}) : D = -4 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt $\quad (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) : D = 4 > 0$, $A = -2 < 0 \Rightarrow$ max.

7. $F_1 = x + \frac{y}{2} + 3$, $F_2 = \frac{x}{2} + y + 5 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Det ger att fältet är konservativt.
   Vi kan då byta väg och väljer den räta linjen mellan punkterna (-2,0) och (-2,-4) :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^{-4} (-1 + t + 5)dt = \left[4t + \frac{t^2}{2} \right]_0^{-4} = -8.$$

   Man kan också använda potentialen:

$\phi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}xy + 3x + 5y$: $\phi(-2,-4) - \phi(-2,0) = -8$.

8. Vi använder Lagranges metod och söker minimum av avståndsfunktionens kvadrat (av räknetekniska skäl) under bivillkoret $z = xy + 3$. Vi bildar Lagrangefunktionen $L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xy - z + 3)$. Den eller de punkter som ger det kortaste avståndet finns bland de kritiska punkterna till denna funktion. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = 2x + \lambda y \quad = 0 & (1) \\ L_2 = 2y + \lambda x \quad = 0 & (2) \\ L_3 = 2z - \lambda \quad\quad = 0 & (3) \\ L_4 = xy - z + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Om $x \neq 0$, $y \neq 0$ ger (1) och (2) $y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$.

$y = x$: $(1) \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow z = -1$. (4) ger då $x^2 + 4 = 0$ dvs omöjligt.

$y = -x$: $(1) \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow z = 1$. (4) ger då $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Detta ger punkterna $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ och $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. Dessa punkter ger avståndet $\sqrt{5}$.

Om $x = 0$ blir $y = 0$ och tvärtom. (4) ger då $z = 3$ dvs punkten $(0,0,3)$. Denna punkt ger avståndet 3. Det kortaste avståndet är alltså $\sqrt{5}$.

9. Vi sluter ytan S genom att lägga till den plana cirkelskivan $S_1 : x^2 + y^2 \leq 1$ i $xy-$planet och kan då använda divergenssatsen:

$$\oiint_{S+S_1} \overline{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_R div\overline{F} dxdydz = \iiint_R (2xy + 1 - y) dxdydz = \{symm\} = \iiint_R dxdydz = V$$ där V

är volymen av det inneslutna området R som är ett halvklot. Vi får $V = \frac{1}{2}\frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Från detta måste vi nu dra bort flödet ner genom ytan S_1:

$$\iint_{S_1} \overline{F} \cdot \hat{N} dS = \iint_{S_1} (x^2 y, y, x^2) \cdot (0,0,-1) dS = \iint_{S_1} (-x^2) dS = -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \int_0^1 r^2 r dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Det sökta flödet är alltså $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{11\pi}{12}$.

10. Låt $F = x^4 + y^4 + 4z - 9$, $G = x + 3y + 2z - 7$. I punkten $(0,1,2)$ fås $F = G = 0$ och

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x^3 & 4y^3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12x^3 - 4y^3$$

. I punkten $(0,1,2)$ är detta $-4 \neq 0$.

Detta visar existensen av de två funktionerna. Dessa är deriverbara och vi får genom implicit derivering map z i det givna ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 4x^3 x' + 4y^3 y' + 4 = 0 \\ x' + \quad\quad 3y' + 2 = 0 \end{cases}$$

. I punkten $(0,1,2)$ fås

$$\begin{cases} \quad 4y' + 4 = 0 \\ x' + 3y' + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x'(2) = 1.$$