Lösningar till tentamen i kurs SF1617/5B1131 Matematiska metoder II, för S 090825.

Linjär algebra

1. Vi beräknar determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Detta visar att vektorerna duger som bas. Låt koordinatvektorn ges av (a,b,c). Då gäller att $a(1,1,2)+b(2,1,3)+c(1,2,0)=(2,-1,4)$. Detta ger systemet
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Ur detta fås koordinatvektorn $(a,b,c)=(-1,2,-1)$.

2. Den sökta matrisen $[T]=[T_3][T_2][T_1]$ där $[T_i]$, $i=1,2,3$ ges av att dess kolumner är $T_i(1,0)$ och $T_i(0,1)$.

$T_1(1,0)=(1,0)$, $T_1(0,1)=(0,0) \Rightarrow [T_1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$T_2(1,0)=(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $T_2(0,1)=(-\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3})=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}) \Rightarrow [T_2]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

$T_3(1,0)=(0,1)$, $T_3(0,1)=(1,0) \Rightarrow [T_3]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Totalt ger detta $[T]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Vi söker matrisens egenvärden:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \Rightarrow \lambda = 1,2,3 .$$
Egenvektorerna fås:
$$\lambda=1: \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t,\ t \neq 0.$$
$$\lambda=2: \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t,\ t \neq 0.$$
$$\lambda=3: \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} t,\ t \neq 0.$$

Då gäller att t ex matrisen $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$ diagonaliserar A så att $P^{-1}AP=D$ där

$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

4. Det räcker att visa att de båda vektorerna är linjärt oberoende. Låt $a\overline{u}+bT(\overline{u})=\overline{0}$. Vi skall visa att $a=b=0$. Operera med T: $aT(\overline{u})+bT^2(\overline{u})=T(\overline{0})=\overline{0}$. Eftersom $T^2(\overline{u})=\overline{0}$ och $T(\overline{u})\neq\overline{0}$ ger detta $a=0$. Insättning i den första ekvationen ovan ger $bT(\overline{u})=\overline{0}\Rightarrow b=0$ och beviset är klart.

Flervariabelanalys

5. $\begin{cases}f_1=-2x+2y=0\\ f_2=3y^2+2x-14y+9=0\end{cases}$ Den första ekvationen ger $y=x$ vilket i den andra ger $3y^2-12y+9=0\Rightarrow y=1{,}3$. De kritiska punkterna är då $(1,1)$ och $(3,3)$.

$f_{11}=-2$, $f_{12}=2$, $f_{22}=6y-14$. Det ger Hessematrisen $H(x,y)=\begin{bmatrix}-2&2\\2&6y-14\end{bmatrix}$

Ur det får vi $H(1,1)=\begin{bmatrix}-2&2\\2&-8\end{bmatrix}$. Huvuddiagonaldeterminanternas teckenväxling är -+ vilket betyder lokal maxpunkt.

$H(3,3)=\begin{bmatrix}-2&2\\2&4\end{bmatrix}$. Huvuddiagonaldeterminanternas teckenväxling är - - vilket betyder sadelpunkt.

6. Vi måste dela upp området D i två delområden D_1 och D_2 där det första begränsas av linjerna $y=x$, $y=3x$ och $x=1$ och det andra av linjerna $x=1$, $y=x$ och $x+y=4$. Detta ger nu

$$\int_D (x+y-2)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{3x}(x+y-2)\,dxdy+\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x+y-2)\,dxdy=$$

$$=\int_0^1\left[(x-2)y+\frac{y^2}{2}\right]_x^{3x}dx+\int_1^2\left[(x-2)y+\frac{y^2}{2}\right]_x^{4-x}dx=\int_0^1(6x^2-4x)\,dx+\int_1^2(4x-2x^2)\,dx=$$

$$=0+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

7. Vi parametriserar cirkelbågen: $\begin{cases}x=t\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=dt\\ dy=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\end{cases}$

Linjeintgralen blir då $\int_1^0 (t(1-t^2)-t)\,dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$.

8. Vi använder Lagranges multiplikatormetod:
Låt $f(x,y) = xy^2z^3$ och $g(x,y) = x+y+z-30$. Vi bildar Lagrangefunktionen $L(x,y,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-30)$ och söker de kritiska punkterna till denna:

$$\begin{cases} L_1 = y^2z^3 & +\lambda = 0 \\ L_2 = 2xyz^3 & +\lambda = 0 \\ L_3 = 3xy^2z^2 & +\lambda = 0 \\ L_4 = x+y+z-30 = 0 \end{cases}$$

Ur de tre första fås $y^2z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2z^2 \Rightarrow y = 2x$, $z = 3x$.

Insättning i den sista ekvationen ger $x + 2x + 3x = 30 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 10$, $z = 15$.

9. Låt
$F(x,y,z) = x+y+z-\sin xyz \Rightarrow F(0,0,0) = 0$. $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy\cos xyz \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$.
Då ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F = 0$ definierar z som en kontinuerligt deriverbar funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning av (0,0,0) . $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ fås genom implicit derivering i ekvationen $x+y+z-\sin xyz = 0$:

$$1 + \frac{\partial f}{\partial x} - yz\cos xyz - xy\frac{\partial f}{\partial x}\cos xyz = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$$

$$1 + \frac{\partial f}{\partial y} - xz\cos xyz - xy\frac{\partial f}{\partial y}\cos xyz = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$$

En normalvektor till funktionsytan $z = f(x,y)$: $(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$. I origo fås normalvektorn (1,1,1). Tangentplanets ekvation ges då av $x+y+z = 0$.

10. $$rot\overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + e^{xz} & 2xz + e^{yz} & z \end{vmatrix} = (-2x - ye^{yz}, y + xe^{xz}, z) .$$

Den utåtriktade enhetsnormalen till cylinderytan S är (x, y ,0). Flödet ges då av

$$\iint_S (-2x - ye^{yz}, y + xe^{xz}, z)\cdot(x,y,0)\,dS = \iint_S (-2x^2 - xye^{yz} + y^2 + xye^{xz})\,dS = \{symm\} =$$

$$= \iint_S (-2x^2 + y^2)\,dS = \{cylinderkoord,\ dS = d\theta dz\} = \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - 2\cos^2\theta)\,d\theta \int_0^1 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \pi - 2\pi = -\pi .$$

Enklare är dock att använda divergenssatsen. Vi sluter då ytan med två enhetscirkelskivor vid $z = 0$ (S_1) resp $z = 1$ (S_2) . Om det inneslutna området kallas R fås

$\iint\limits_{S+S_1+S_2} rot\overline{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint\limits_R divrot\overline{F} dxdydz$. Eftersom $divrot\overline{F} = -2+1+1=0$ fås $\iint\limits_S rot\overline{F} \cdot \hat{N} dS = -\iint\limits_{S_1} rot\overline{F} \cdot \hat{N} dS - \iint\limits_{S_2} rot\overline{F} \cdot \hat{N} dS$. Den första integralen till höger är 0 eftersom normalen på bottenplattan är (0,0,-1) och $z=0$ på den ytan. På locket är normalen (0,0,1) och z = 1 . Det sökta flödet blir alltså $-\iint\limits_{S_2} dS = -\pi$.