Lösningar till tentamen i kurs SF1617/5B1131 Matematiska metoder II, för S 090109.

Linjär algebra

1. Standardmatrisens kolumner ges av $T(\bar{e}_1)$ och $T(\bar{e}_2)$. Detta ger $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ som har determinantvärdet $1 \neq 0 \Rightarrow T$ är injektiv.

2. Vektorerna bildar en bas om och endast om följande determinant inte är 0:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{-R_1 + R_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{utv.efter\, K_3\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 .$$
Vektorerna bildar alltså en bas för alla värden på a.

3. Vi söker matrisens egenvärden:
$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1,1,2 .$$ Egenvektorerna fås:
$$\lambda = -1: \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t ,\ t \neq 0.$$
$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t ,\ t \neq 0.$$
$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t ,\ t \neq 0.$$
Eftersom de tre egenvärdena är olika så är matrisen diagonaliserbar.

4. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A\bar{x} + K\bar{x} + 8 = 0$ där $\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$ och $K = \begin{bmatrix} 50 & 100 \end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är
$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 24 \\ 24 & \lambda+7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 625 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 25 .$$ Normerade egenvektore söks:
$$\lambda = 25: \begin{bmatrix} 18 & 24 & 0 \\ 24 & 32 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$
$$\lambda = -25: \begin{bmatrix} -32 & 24 & 0 \\ 24 & -18 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') + 8 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T AP)\bar{x}' + KP\bar{x}' + 8 = 0$. Då $P^T AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$

och $KP = \begin{bmatrix} 50 & 100 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 110 \end{bmatrix}$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 110 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0 \Rightarrow 25(x')^2 - 25(y')^2 - 20x' + 110y' + 8 = 0 .$$

Kvadratkomplettering ger $(x' - \frac{2}{5})^2 - (y' - \frac{11}{5})^2 + 5 = 0$. Med koordinatbytet

$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{5} \\ y'' = y' - \frac{11}{5} \end{cases}$ som är en translation fås slutligen $\frac{(y'')^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{(x'')^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ dvs kurvan är en hyperbel.

Flervariabelanalys

5. $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$, $\|\bar{u}\| = 1$ dvs $\bar{u} = \frac{(3,4)}{5}$.

$f_1 = \frac{2x - 6y}{1 + x^2 - 6xy + 8y^2}$, $f_2 = \frac{-6x + 16y}{1 + x^2 - 6xy + 8y^2}$. Detta ger $\nabla f(2,1) = (-2,4)$. Vi får

$D_{\bar{u}} f(2,1) = (-2,4) \cdot \frac{(3,4)}{5} = 2$. Riktningsderivatan är störst då riktningsvektorn och gradientvektorn har samma riktning. Då fås $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \|\nabla f\|$. I punkten $(2,1)$ är alltså det maximala värdet $\|(-2,4)\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

6. Vi använder Lagranges multiplikatormetod och bildar funktionen
$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + x + y^2 + y - 4)$. Vi söker dess kritiska punkter:

$\begin{cases} 1 + \lambda(2x + 1) = 0 \\ 1 + \lambda(2y + 1) = 0 \\ x^2 + x + y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$ Ur första och andra ekv fås $x = y$ som i den tredje ger

$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, -2$. Det ger punkterna $(1,1)$ och $(-2,-2)$ där f antar det största värdet 2 resp det minsta värdet -4 .

7. Vi ser att området ligger i första kvadranten och begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$, linjen $y = 1$ och y – axeln. Området är både x - och y - simpelt och vi kan då iterera om integralen och får:

$$\int_0^1 e^{y^3}dy\int_0^{y^2}dx = \int_0^1 y^2 e^{y^3}dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

8. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2e^{xy}+y^3)-\frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}+(1+xy)e^{xy}) = 2xe^{xy}+x^2ye^{xy}-(xe^{xy}+(1+xy)xe^{xy}) = 0$.

   Vektorfältet är alltså konservativt och vi kan byta väg. Vi väljer att gå längs $x-$axeln: $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$, $t:2\to -2$. Det ger integralen $\int_2^{-2} 1dt = -4$.

9. Gradienten är definierad endast för skalärfält och divergens och rotation endast för vektorfält. Därför är det enda meningsfulla uttrycket

$$rotgradf = rot(2xy-\sin z, x^2-e^y, -x\cos z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy-\sin z & x^2-e^y & -x\cos z \end{vmatrix} =$$

$$= (0, \cos z - \cos z, 2x-2x) = \bar{0} .$$

10. Vi sluter ytan S genom att lägga till den plana cirkelskivan $S_1 : x^2+y^2 \le 1$ i $xy-$planet och kan då använda divergenssatsen:

$$\oiint_{S+S_1} \bar{F}\cdot\hat{N}dS = \iiint_R div\bar{F}dxdydz = \iiint_R (2xy+1-y)dxdydz = \{symm\} = \iiint_R dxdydz = V$$ där V är volymen av det inneslutna området R som är ett halvklot. Vi får $V = \frac{1}{2}\frac{4\pi\cdot 1^3}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

   Från detta måste vi nu dra bort flödet ner genom ytan S_1 :

$$\iint_{S_1}\bar{F}\cdot\hat{N}dS = \iint_{S_1}(x^2y, y, x^2)\cdot(0,0,-1)dS = \iint_{S_1}(-x^2)dS = -\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\int_0^1 r^2 rdr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = -\frac{\pi}{4} .$$

   Det sökta flödet är alltså $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{11\pi}{12}$.