Lösningar till tentamen i kurs SF1617 Matematiska metoder II, för S 080826.

Del 1

1. Frågan avgörs av om ekvationen $C_1\overline{v}_1 + C_2\overline{v}_2 + C_3\overline{v}_3 + C_4\overline{v}_4 = \overline{0}$ endast har triviala lösningen eller om det finns oändligt många lösningar. Ekvationen ger systemet $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix}$. Ett homogent system med fler variabler än ekvationer har alltid oändligt många lösningar. Alltså är S en linjärt beroende mängd. För att se om vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av vektorerna byter vi ut nollvektorn mot denna vektor i systemet ovan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 13 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oändligt många lösningar dvs vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av de givna vektorerna.

2. Avbildningens matris har kolumnerna $T(1,0) = (4,3)$, $T(0,1) = (2,3) \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Vi söker matrisens egenvärden:

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ 6$. Egenvektorerna fås:

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda = 6: \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t\,.$$

3. Det minsta värdet är $-\|\nabla f(1,2)\|$ och antas i den riktning som ges av $-\nabla f(1,2)$.

$$f_1 = \frac{3}{\sqrt{3x-y}}\,,\ f_2 = -\frac{1}{\sqrt{3x-y}} \Rightarrow \nabla f(1,2) = (3,-1) \Rightarrow \|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{10}\,.$$

Det minsta värdet är alltså $-\sqrt{10}$ och det antas i riktningen (3,-1) .

4. Området är den del av enhetscirkelskivan som befinner sig mellan 0 och $\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

Integralen blir $\displaystyle\int_0^{3\pi/4} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr = \frac{3\pi}{4}\left[(1-r^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$

5. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{y})-\frac{\partial}{\partial y}(2x\ln y-3x^2)=\frac{2x}{y}-\frac{2x}{y}=0$. Vektorfältet är då konservativt och vi kan byta väg mellan punkterna $(0,1)$ och $(\pi,1)$. Vi måste dock hålla oss i området $y>0$. Vi väljer den räta linjen $y=1$: $x=t \Rightarrow dx=dt$, $y=1 \Rightarrow dy=0$, $t: 0 \to \pi$ ger integralen $-3\int_0^{\pi} t^2 dt = \left[-t^3\right]_0^{\pi} = -\pi^3$.

6. $\hat{N}dS = \pm(-z_1, -z_2, 1)\,dxdy = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)\,dxdy$ där det positiva tecknet valts. Låt D vara den origocentrerade cirkelskivan med radien 2 i xy – planet. Flödet ges då av

$$\iint_D (y, -x, 2-\sqrt{x^2+y^2})\cdot(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)\,dxdy = \iint_D (2-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2-r)\,r\,dr = 2\pi\left[r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

7. En normalvektor till ytan ges av $\nabla(2xy+\frac{z}{x}+\ln(z-y)) = (2y-\frac{z}{x^2}, 2x-\frac{1}{z-y}, \frac{1}{x}+\frac{1}{z-y})$. I punkten $(1,2,3)$ Fås normalvektorn $(1,1,2)$ vilket ger tangentplansekvationen $x+y+2z=C$. Insättning av punkten ger $C=9$.

Del 2

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området är en origocentrerad cirkelskiva med radien 3 .Vi studerar först det inre:

$$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = x-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3,0)$$ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen $x^2+y^2=9$ och använder då Lagranges multiplikatormetod:

Låt $L(x,y,\lambda) = (x-3)y + \lambda(x^2+y^2-9)$. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = y + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_2 = x-3+2\lambda y = 0 & (2) \\ L_3 = x^2+y^2-9 = 0 & (3) \end{cases}$$ Ur (1) och (2) fås $\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{(x-3)}{2y} \Rightarrow x^2-3x=y^2$.

Insättning i (3) ger $2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3, -\dfrac{3}{2}$. $x = 3 \Rightarrow y = 0$ dvs punkten (3,0).

$x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{27}{4} \Rightarrow y = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ vilket ger punkterna $(\dfrac{-3}{2}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$ med funktions-

värdena $\pm\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. Dessa är de största resp minsta värdena eftersom $f(3,0) = 0$.

9. Vi ser direkt att A är symmetrisk för $a = 0$ vilket krävs för ortogonal diagonalisering.
Vi söker matrisens egenvärden :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & a \\ 4 & 7-\lambda & a^2+a \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\left[(\lambda-1)(\lambda-7)-16\right] = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9) = 0 \,.$$

Detta ger egenvärdena $\lambda = -1, -1, 9$. $\lambda = 9$ har ett en-dimensionellt egenrum. Frågan om diagonaliserbarhet beror på dimensionen hos egenrummet till $\lambda = -1$. Vi söker egenvektorerna för olika värden på a :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a^2+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Om $a \neq 0,1$ så får vi en parameter i lösningen och egenrummet blir en-dimensionellt. Då kan vi endast finna två linjärt oberoende egenvektorer till A som då ej är diagonaliserbar.
Om $a = 1$ får vi två parametrar i lösningen och egenrummet blir två-dimensionellt.
Då kan vi finna tre linjärt oberoende egenvektorer till A som då är diagonaliserbar.
Fallet $a = 0$ behandlades inledningsvis.

10. Låt det inneslutna området K begränsas av ytan S .Vi använder divergenssatsen.
Flödet ges av ytintegralen

$$\iint_S (x^2y, -y^2, 4z^2)\cdot \hat{N} dS = \iiint_K (2xy - 2y + 8z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_0^2 (2xy - 2y + 8z)\right) dydz =$$

$$\iint_D \left[x^2y - 2xy + 8zx\right]_0^2 dydz = 16\iint_D z\,dydz = 16\int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy \int_0^3 z\,dz = 16\int_0^3 z\sqrt{9-z^2}\,dz =$$

$$= 16\left[(9-z^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^3 = 144\,.$$

11. Låt T vara en sådan triangel. Vi utför variabelbytet

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{a} \\ v = \dfrac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \det\left[\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}.$$ Funktionerna u och v är linjära. Det gör att triangeln T avbildas på en triangel S. Ellipsen avbildas på cirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Vi får Arean (S) $= \iint_S dudv = \iint_T \left|\det\left[\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right]\right| dxdy = \frac{1}{ab}\iint_T dxdy = \frac{1}{ab}\cdot$ Arean (T). Det ger att den maximala arean av T är lika med den maximala arean av S multiplicerad med ab.

Arean av en liksidig triangel med sidan d är $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$. Sidan d hos en liksidig triangel inskriven i en cirkel med radien R kan fås på följande sätt :

Placera triangeln så att ett hörn ligger i punkten (R , 0) . Ett av de andra hörnen hamnar då i punkten $(R\cos\frac{2\pi}{3}, R\sin\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2})$. Avståndsformeln ger då $d = R\sqrt{3}$. Den sökta maximala arean är alltså $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.