KTH Matematik

**Tentamen i kurserna SF1617 och 5B1131 Matematiska metoder II för S.**
**Tisdagen den 20 maj 2008 kl 0800-1300.**

Tentamen består av 2 delar.
Del 1 är avsedd för betygen 3 och E och omfattar 7 uppgifter à 3 poäng. För att uppnå dessa betyg krävs minst 14 poäng.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,…,5) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Om 3 poäng erhålls på någon av de fem första uppgifterna räknas det i fortsättningen som om motsvarande kontrollskrivning varit godkänd.
Del 2 är avsedd för betygen 4 och 5 samt D-A och omfattar 4 uppgifter à 5 poäng.
Betygsgränser för betygen 4 och 5 är 8 resp 15 poäng. Betygsgränser för betygen D, C, B och A är 4, 8, 11 resp 15 poäng. Dessutom krävs att betygen 3 och E uppnåtts på del 1 eller via fem godkända kontrollskrivningar.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

**Del 1**

1. Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ vara standardbasen i $\mathbf{R}^2$. Den injektiva (one-to-one) linjära operatorn $T$ är sådan att $T(3,-4) = \bar{e}_1$ och $T(-2,3) = \bar{e}_2$. Bestäm standardmatrisen för den inversa operatorn.

2. Avgör vilket av följande påståenden som gäller för matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$:

   Ortogonalt diagonaliserbar. Diagonaliserbar men inte ortogonalt. Ej diagonaliserbar.

3. Låt $f(x,y) = xyg(u)$ där $u = \dfrac{y}{x}$ och $g$ är en två gånger deriverbar funktion.

   Beräkna $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Förenkla svaret så att det inte innehåller $x$ och $y$.

4. Beräkna volymen av det ändliga område som begränsas av paraboloiderna $z = 3x^2 + 4y^2$ och $z = 2x^2 + 3y^2 + 4$.

5. Beräkna längden av kurvbågen $\bar{r}(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t, e^t)$ , $0 \le t \le 1$.

6. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = 4x^4 - 2xy - 7x^2 + y^2$ och avgör deras karaktär.

7. Beräkna linjeintegralen $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$ där $C$

   är parabelbågen $2x = \pi y^2$ från origo till punkten $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

VGV

**Del 2**

8. Kurvan $\overline{r}(t) = (t^4, 2 - t^3, 1 - 3t^2)$ , $-\infty < t < +\infty$ skär ellipsoiden $4x^2 + y^2 + 3z^2 = 25$ i punkten (1,3,-2) . Visa detta och att kurvan är vinkelrät mot ellipsoiden i denna punkt.

9. Beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F} = (x^3 - z, y^3 - x, z^3 - y)$ ut genom den del av cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ för vilken $0 \le z \le 2$ .

10. För den linjära operatorn $T$ på $\mathbf{R}^3$ gäller att
$T(1,1,2) = (2,0,1)$ , $T(1,0,-1) = (1,2,3)$ , $T(0,0,1) = (1,1,0)$ .
Undersök om det finns vektorer $\overline{u}$ , $\overline{v}$ och $\overline{w}$ sådana att
$T(\overline{u}) = (1,0,0)$ , $T(\overline{v}) = (0,1,0)$ , $T(\overline{w}) = (0,0,1)$ .
Bestäm i så fall samtliga sådana vektorer $\overline{u}$ , $\overline{v}$ och $\overline{w}$ .

11. De hyperboliska funktionerna $\cosh t$ och $\sinh t$ definieras av
$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ och $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ .
Undersök om den obegränsade kropp som definieras av
$\sinh(x^2 + y^2) \le z \le \cosh(x^2 + y^2)$ har ändlig volym och beräkna i så fall denna.