Lösningar till tentamen i kurs SF1617 Matematiska metoder II, för S 080520.

Del 1

1. Den sökta standardmatrisens kolumner ges av $T^{-1}(\bar{e}_1)$ och $T^{-1}(\bar{e}_2)$.
   $T^{-1}(\bar{e}_1) = T^{-1}(T(3,-4)) = (3,-4)$, $T^{-1}(\bar{e}_2) = T^{-1}(T(-2,3)) = (-2,3)$ ger då standardmatrisen $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Vi söker matrisens egenvärden:
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 1 & 1 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda+1)\left[(2-\lambda)(2+\lambda-1)+(-1-1)\right] = (\lambda+1)(\lambda-\lambda^2) = \lambda(\lambda+1)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1,0,1 .$$
   Matrisen har alltså tre olika egenvärden och är då diagonaliserbar. Den är dock inte ortogonalt diagonaliserbar eftersom den inte är symmetrisk.

3. Kedjeregeln ger
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xg + xy\frac{dg}{du}\cdot\frac{1}{x} = xg + y\frac{dg}{du} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g + x\frac{dg}{du}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + y\frac{d^2 g}{du^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$
$$= g - \frac{y}{x}\frac{dg}{du} - \frac{y^2}{x^2}\frac{d^2 g}{du^2} = g - u\frac{dg}{du} - u^2\frac{d^2 g}{du^2} .$$

4. Låt K beteckna området mellan paraboloiderna. Skärningskurvans projektion på xy - planet ges av $3x^2 + 4y^2 = 2x^2 + 3y^2 + 4$ dvs cirkeln $x^2 + y^2 = 4$. Områdets projektion på xy – planet är alltså cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 4$. Låt D beteckna detta område. Volymen ges av
$$\iiint_K dxdydz = \iint_D dxdy \int_{3x^2+4y^2}^{2x^2+3y^2+4} dz = \iint_D [z]_{3x^2+4y^2}^{2x^2+3y^2+4} dxdy = \iint_D (4-(x^2+y^2))dxdy .$$
   Med polära koordinater fås volymen $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2)rdr = 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$.

5. Längden ges av $\int_0^1 \left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\right\| dt$. Vi får

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = (2e^t \cos t - 2e^t \sin t, 2e^t \sin t + 2e^t \cos t, e^t) \Rightarrow \left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \right\| =$$

Längden är alltså

$$= \sqrt{4e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + 4e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{2t}} = \sqrt{9e^{2t}} = 3e^t \ .$$

$$\int_0^1 3e^t dt = 3\left[e^t\right]_0^1 = 3(e-1) \ .$$

6. De kritiska punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} f_1 = 16x^3 - 2y - 14x = 0 & (1) \\ f_2 = -2x + 2y = 0 & (2) \end{cases} \quad (2) \Rightarrow x = y \ \text{ som i } (1) \text{ ger } 16x^3 - 16x = 0$$

dvs $16x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$. Det ger punkterna (0,0) , (-1,-1) och (1,1) .

$f_{11} = 48x^2 - 14$, $f_{12} = -2$, $f_{22} = 2$ ger Hessematriserna

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -14 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow H \text{ är indefinit dvs (0,0) är en sadelpunkt.}$$

$$H(-1,-1) = H(1,1) = \begin{bmatrix} 34 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow H \text{ är positivt definit dvs (-1,-1) och (1,1)}$$

är lokala minpunkter.

7. Vi undersöker om vektorfältet är konservativt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 - 2y\sin x + 3x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - y^2\cos x) = -2y\cos x + 6xy^2 - (6xy^2 - 2y\cos x) = 0 \ .$$

Vektorfältet är då konservativt (kurvan ligger i ett enkelt sammanhängande område) och vi kan byta integrationsväg eller använda en potential. Vi byter väg: Låt C_1 vara räta linjen från origo till punkten (0,1) och låt C_2 vara räta linjen från punkten (0,1) till punkten $(\frac{\pi}{2},1)$. Linjeintegralen ges då av

$$\int_{C_1} 0\,dx + 1\,dy + \int_{C_2} (2x - \cos x)\,dx + 0dy = \int_0^1 dy + \int_0^{\pi/2} (2x - \cos x)\,dx = [y]_0^1 + [x^2 - \sin x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} \ .$$

Del 2

8. Insättning av punkten (1,3,-2) i ellipsoidens ekvation ger att punkten ligger på ytan. Vi observerar att $\bar{r}(-1) = (1,3,-2)$. Punkten ligger alltså även på kurvan som därmed skär ellipsoiden i denna punkt. En tangentvektor till kurvan ges av

$\frac{d\bar{r}}{dt} = (4t^3, -3t^2, -6t)$. I skärningspunkten ger detta tangentvektorn $\bar{T} = (-4, -3, 6)$.

Ellipsoiden är nivåytan $f = 25$ till funktionen $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 3z^2$. En normalvektor till ytan ges då av $\nabla f = (8x, 2y, 6z)$. I skärningspunkten ger detta normalvektorn $\bar{N} = (8, 6, -12)$. Eftersom $\bar{N} = -2\bar{T}$ är $\bar{T}$ parallell med $\bar{N}$ vilket innebär att kurvan skär ellipsoiden under rät vinkel i punkten (1,3,-2).

9. Vi vill använda divergenssatsen och sluter cylinderytan S med två enhetscirkelskivor vid $z = 0$ (S_1) respektive $z = 2$ (S_2). Låt K beteckna det inneslutna området. Eftersom $div\bar{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ fås enligt divergenssatsen (utåtriktade normalvektorer):

$$\oiint_{S+S_1+S_2} \bar{F} \cdot \hat{N} dS = 3\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = 3\iint_{S_1} \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^2 dxdy =$$

$$= \iint_{S_1} (6(x^2 + y^2) + 8) dxdy = 2\pi \int_0^1 (6r^2 + 8) r dr = 2\pi \left[\frac{3}{2} r^4 + 4r^2 \right]_0^1 = 11\pi$$

där vi använt polära koordinater. Vi beräknar nu flödet genom ytorna S_1 och S_2 :

$\iint_{S_1} (x^3, y^3 - x, -y) \cdot (0,0,-1) dS = \iint_{S_1} y \, dxdy = 0$ pga symmetri.

$\iint_{S_2} (x^3 - 2, y^3 - x, 8 - y) \cdot (0,0,1) dS = \iint_{S_2} (8 - y) dS = 8\iint_{S_2} dS = 8\pi$. Det sökta flödet är alltså $11\pi - 0 - 8\pi = 3\pi$.

10. Vi använder att kolumnerna i en operators standardmatris ges av operatorns verkan på standardbasvektorerna. Om T har invers fås direkt att $\bar{u} = T^{-1}T(\bar{u}) = T^{-1}(1,0,0)$, $\bar{v} = T^{-1}T(\bar{v}) = T^{-1}(0,1,0)$, $\bar{w} = T^{-1}T(\bar{w}) = T^{-1}(0,0,1)$. Det betyder att de sökta vektorerna är kolumnerna i operatorns inversmatris. Då inversen är entydig kan det inte finnas fler sådana vektorer. Det återstår att visa att T har invers. Vi söker operatorns standardmatris:

$T(1,0,0) = T((1,0,-1) + (0,0,1)) = T(1,0,-1) + T(0,0,1) = (1,2,3) + (1,1,0) = (2,3,3)$

$T(0,1,0) = T((1,1,2) - (1,0,-1) - 3(0,0,1)) = T(1,1,2) - T(1,0,-1) - 3T(0,0,1) =$

$= (2,0,1) - (1,2,3) - 3(1,1,0) = (-2,-5,-2)$

$T(0,0,1) = (1,1,0)$.

Det ger standardmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Inversen till denna är $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 9 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

De sökta vektorerna är alltså $\frac{1}{7}(2,3,9)$, $\frac{1}{7}(-2,-3,-2)$ och $\frac{1}{7}(3,1,-4)$.

11. Låt den del av kroppen som befinner sig inom avståndet R från z - axeln betecknas K_R . Dess projektion på xy – planet är cirkelskivan $D_R : x^2 + y^2 \le R^2$. Volymen av K_R är $\iiint\limits_{K_R} dxdydz = \iint\limits_{D_R} [z]_{\sinh(x^2+y^2)}^{\cosh(x^2+y^2)} dxdy = \iint\limits_{D_R} (\cosh(x^2 + y^2) - \sinh(x^2 + y^2))\, dxdy = \iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.

Polära koordinater ger resultatet $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2})$. Den sökta volymen ges av $\pi \lim\limits_{R\to\infty} (1 - e^{-R^2}) = \pi$ och är alltså ändlig.