KTH Matematik

**Tentamen**
**5B1116 Matematik II för MEDIA**
**20 december, 2006**

- skrivtid: 8:00-13:00
- Inga böker/anteckningar/räknare får användas.
- **Allt ska motiveras!** Ett svar utan förklaring är värt 0 poäng!
- Minst 3 på varje del krävs för godkänt. Minst 25 poäng krävs för betyg 4. Minst 6 på varje del krävs för betyg 5.
- Tentamen består av fem delar.
- Poäng fråm en godkänd KS tas automatiskt till motsvarande del (om man inte har meddelat annat).

## DEL 1

(1) (2 p.) Säg vilket påstående som gäller genom att kryssa K(Korrekt) eller F(Falsk).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | Låt $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$. De är vinkelräta om och endast om $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}$ | $K$ | $F$ |
| $(b)$ | Låt $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vara koplana vectorer. Då är $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$. | $K$ | $F$ |
| $(c)$ | Linjen med parametrisk ekvation $(x, y) = (2 + 3t, 1 - 4t)$ är parallel med vektorn $(2, 1)$. | $K$ | $F$ |
| $(d)$ | Planet med ekvation $(x - a) + (y - b) + (z - c) = 0$ är vinkelrätt mot vektorn $(1, 1, 1)$. | $K$ | $F$ |

(2) (3 p.) Bestäm, för varje värde på konstanten $a$, alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 3x + -6y + 9z = 9 \\ 2x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

(3) (4 p.) En triangel har hörnen i $A = (1, 1, 2), B = (2, 0, 1), C = (3, 1, 0)$, (med avseende till en ON-bas). Vi betecknar med $\alpha, \beta, \gamma$ vinklarna i hörnen $A, B, C$.
(a) bestäm omkrets till triangeln.
(b) bestäm $\cos(\alpha)$.
(c) bestäm $\sin(\beta)$.

## DEL 2

(1) (2 p.) Säg vilket påstående som gäller genom att kryssa K(Korrekt) eller F(Falsk). Låt $A$ vara en $n \times n$ matris.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | $A$ är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$. | $K$ | $F$ |
| $(b)$ | $A$ är inverterbar om och endast om kolonnerna utgör en bas till $\mathbb{R}^n$. | $K$ | $F$ |
| $(c)$ | Om $A$ är inverterbar då har systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ oändligt många lösningar. | $K$ | $F$ |
| $(d)$ | Om man låter två rader i $A$ byta plats så byter determinanten tecken. | $K$ | $F$ |

(2) (3 p.) Betrakta den linjära avbildningen: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierad av:

$$F(x, y, z) = (3x + y, x + z, 2y + z).$$

(a) Bestäm matrisen av $F$ med avseende på standardbasen.
(b) Visa att $(F(1, 0, 1), F(0, 1, 1), F(1, 1, 0))$ utgör en bas till $\mathbb{R}^3$.

(3) (4 p.) Bestäm för vilka värden på kostanten $a$ matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och hitta inversen.

## DEL 3

(1) (2 p.) Säg vilket påstående som gäller genom att kryssa K(Korrekt) eller F(Falsk). Låt $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ öppen, vara en funktion och $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | $f$ är partiellt deriverbar i $\vec{a}$ om $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ existerar för varje $i$. | $K$ | $F$ |
| $(b)$ | Om $f$ är partiellt deriverbar då är $f$ differentierbar. | $K$ | $F$ |
| $(c)$ | Om $f$ är av klass $C^1$ då är $f$ differentierbar. | $K$ | $F$ |
| $(d)$ | Låt $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Derivatan i $\vec{a}$ med avseende på riktning $\vec{v}$ är $Grad(f)(\vec{a}) \cdot \vec{v}$. | $K$ | $F$ |

(2) (3 p.)Bestäm tangentplanet till ytan $e^{x^2+y^2}(4xy + 5z) = 5$ i punkten $(0, 0, 1)$.

(3) (4 p.)Betrakta funktionen $f(x, y) = \ln(\frac{x}{y})$. Låt $(u, v)$ vara nya koordinater sådana att:

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

## DEL 4

(1) (2 p.) Säg vilket påstående som gäller genom att kryssa K(Korrekt) eller F(Falsk). Låt $A$ vara en $n \times n$ matris.

($a$) $A$ är diagonaliserbar om och endast om $A$ har $n$ stycken olika egenvärden. $K$ $F$
($b$) Antag att $A$ är symmetrisk. Om $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ är egenvektorer till olika egenvärden då är de ortogonala. $K$ $F$
($c$) $A$ är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om $A$ är symmetrisk. $K$ $F$
($d$) $A$ är ortogonal om och endast om $\det(A) = 1$. $K$ $F$

(2) (3 p.)Betrakta matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avgör om det finns en matris $C$ och en diagonalmatris $D$ sådana att:

$$C^{-1}AC = D.$$

(3) (4 p.)Skriv $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$ på huvudaxelform (kanonisk form). Kan du säga vad ekvationn motsvarar geometriskt?

## DEL 5

(1) (2 p.) Säg vilket påstående som gäller genom att kryssa K(Korrekt) eller F(Falsk).

($a$) Låt $Y(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ vara en linjär avbildning. Då är $(x,y,z) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ ett plan. $K$ $F$
($b$) Låt $f(x,y)$ vara en funktion av klass $C^1(D), D$ öppen och $P \in D$ en extrempunkt. Då kan funktionen approximeras som $f(P) + Q(h,k)$ där $Q$ är en kvadratisk form. $K$ $F$
($c$) En kvadratisk form $Q(h,k)$ är positivt definit om $Q(h,k) \geq 0$ för varje $h \geq 0, k \geq 0$. $K$ $F$
($d$) En kvadratisk form $Q(h,k)$ är positivt semidefinit om $Q(h,k) \geq 0$ för varje $(h,k) \neq (0,0)$. $K$ $F$

(2) (4 p.) Betrakta mängden $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$.
(a) Rita mängden.
(b) Säg varför $K$ är kompakt.
(c) Bestäm de största och minsta värdena till $f = x^2ye^{-(x+y)}$ i området $K$.

(3) (3 p.)Avgör om systemet:

$$\begin{cases} x^2 - y + 3z & = & 0 \\ xy + y^2 - z^2 & = & 0 \end{cases}$$

har lösningar på formen $(x(z), y(z), z)$ i en omgivning av $(-1, 1, 0)$.