Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 16 januari 2013 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden och Pär Kurlberg.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Vid denna tentamensskrivning får bonuspoäng erhållna under ht 2013 användas liksom bonuspoäng erövrade under läsåret 2012-13.

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (a) (2p) Bestäm belopp och ett argument för det komplexa talet

$$(1+i)^{17}(\sqrt{3}-i)^5(1-i)^{-15}.$$

   (b) (3p) Skriv polynomet z^8-16 som en produkt av reella irreducibla polynom.

2. Betrakta i vektorrummet $\mathbb{R}^3$ de fyra vektorerna $\vec{e}_1=(1,1,1,1)$, $\vec{e}_2=(1,2,3,a)$, $\vec{e}_3=(0,1,a,1)$ och $\vec{e}_4=(1,a,2,1)$, där a betecknar ett reellt tal. Låt L_a betckna det delrum till $\mathbb{R}^3$ som spämnns upp av dessa fyra vektorer

   (a) (2p) Visa att när $a=1$ så bildar vektorerna $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ och $\vec{e}_4$ en bas för $\mathbb{R}^4$, samt bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{v}=(2,1,2,2)$ i denna bas.

   (b) (1p) Visa att när $a=2$ så är dimensionen av delrummet L_a lika med 3.

   (c) (2p) Finns det något värde på talet a sådant att $\dim(L_a)=2$.

3. Kolonnmatrisen $(1\ \ 2\ \ -3)^T$ är en egenvektor till matrisen

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

   (a) (3p) Bestäm $\mathbf{A}$:s samtliga egenvärden och tillhörande egenrum.

   (b) (2p) Bestäm 3×3-matriser $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ och en diagonalmatris $\mathbf{D}$ sådana att $\mathbf{A}$:s invers kan faktoriseras $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{BDC}$.

DEL II

4. De fyra hörnen $P = (1, 2, 1)$, $Q = (4, 3, 2)$, $R = (2, 3, 4)$ och $S = (4, 5, 4)$ bildar hörnen i en tetraederliknande kropp. Bestäm kroppens volym (3p) och avgör hur punkten $T = (6, 5, 5)$ ligger i förhållande till kroppen (2p), dvs om den ligger inuti, utanför eller på någon sidoyta till kroppen. (**Ledning.** Volymen av den tetraderliknande kroppen är lika med en tredjedel av en basyta multiplicerad med längden av en höjd vinkelrätt ut från basytan upp till det motsatta hörnet av kroppen.)

5. (a) (2p) Visa att

$$\langle (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

definierar en inreprodukt i det reella 3-dimensionella vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

   (b) (3p) Betrakta det Euklidiska rum som i $\mathbb{R}^3$ definieras av den inreprodukten ovan. Bestäm i detta rum projektionen av vektorn $(1, 0, 1)$ på ortogonala komplementet $L^\perp$ till delrummet $L = \mathrm{span}\{(1, 1, 1)\}$.

6. (5p) Beteckna rangen hos en matris $\mathbf{X}$ med $\mathrm{rank}(\mathbf{X})$. Konstruera 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, vardera med högst tre nollor, sådana att

$$2 = \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{B}) = \mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = \mathrm{rank}(\mathbf{BA}) + 1.$$

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Delrummen L och K till vektorrummet V säges vara *skeva* om de endast har nollvektorn gemensamt.

   (a) (1p) Låt L beteckna det delrum till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 1, 1)$ och $(2, 3, 1, 0)$. Bestäm ett 2-dimensionellt delrum K till $\mathbb{R}^4$ som innehåller vektorn $(0, 1, 1, 2)$ och som är skevt mot L.

   (b) (2p) Antag $L = \mathrm{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ och $K = \mathrm{span}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ är två skeva 2-dimensionella delrum till R^4. Varje 2×2-matris $\mathbf{A}$ definierar en linjär avbildining A från L till K genom

$$A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 \qquad \text{där} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

   Visa att mängden W_A av alla vektorer $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$, sådana att (x_1, x_2) tillhör $\mathbb{R}^2$, utgör ett 2-dimensionellt delrum till $\mathbb{R}^4$.

   (c) (1p) Karaktärisera de matriser $\mathbf{A}$ för vilka W_A är ett 2-dimensionellt delrum till $\mathbb{R}^4$ skevt mot både L och K, och utred under vilka förutsättningar två sådana delrum W_A och W_B är skeva?

8. (5p) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en avbildning. Vi säger att $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ är en *fixpunkt* om $f(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ med egenskapen att $|\mathbf{A}\vec{x}| > |\vec{x}|$ för alla $\vec{x} \neq \vec{0}$ säges vara *expansiv*. Givet $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ och en expansiv $n \times n$-matris $\mathbf{A}$, definiera en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genom att låta $f(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$. Visa att f har en fixpunkt.