Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

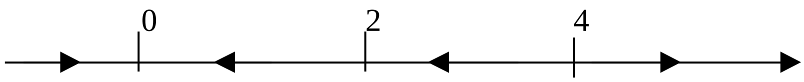
Tisdagen den 19 augusti 2014, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1

Modul 1.

Konstruera en autonom första ordningens differentialekvationen $y' = f(y)$, vars fasporträtt ges av nedanstående figur. Finns det någon stabil jämviktslösning ?



Lösning:

Jämviktslösningarna är 0, 2 och 4. Jämviktslösningen 2 förekommer ett jämnt antal gånger.
En autonom första ordningens differentialekvation ges av $y' = y(y-2)^2(y-4)$.
0 är en stabil jämviktslösning.

SVAR: En autonom första ordningens differentialekvation ges av $y' = y(y-2)^2(y-4)$.
$y = 0$ är den enda stabila jämviktslösningen.

Modul 2.

Bestäm allmänna lösningen till $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ samt ange $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t)$.

Lösning:

Vi startar med att bestämma den allmänna homogena lösningen och bestämmer härvid egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Eftersom matrisen är triangulär kan egenvärdena direkt anges.
Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$. Motsvarande egenvektorer erhålles ur systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = -1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = r_1\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, där r_1 är ett godtyckligt reellt tal.

$\lambda_2 = -3$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = r_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, där r_2 är ett godtyckligt reellt tal.

Den allmänna homogena lösningen är $\mathbf{X}_h = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ 5e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\mathbf{C}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter och Φ är en fundamentalmatris. $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X}_h = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$.

Modul 3.

Betrakta funktionen given av $h(x) = \begin{cases} 3 + x & , \quad 0 < x < 4 \\ -3 + x & , \quad -4 < x < 0 \end{cases}$.

Vidare gäller att $h(x+8)=h(x)$. Bestäm Fourierseriens summa för $x=6$ och $x=20$.

<u>Lösning:</u>

Funktionen h är periodisk med perioden 8.

$h(6)=h(-2+8)=h(-2)=-3-2=-5$

$h(20)=h(2\cdot 8+4)=h(4)$

Fourierseriens summa för $x=6$ är -5.

Fourierseriens summa för $x=20$ erhålles som medelvärdet av $h(4)$ och $h(-4)$.

Vi erhåller $\dfrac{h(4)+h(-4)}{2}=\dfrac{(3+4)+(-3-4)}{2}=0$

SVAR: Fourierseriens summa för $x=6$ är -5. Fourierseriens summa för $x=20$ är 0.

<u>Del 2</u>

11. a) En lösning till begynnelsevärdesproblemet $y'=y^3$, $y(0)=0$ ges av $y\equiv 0$.
Är lösningen entydig? Motivera!

b) $y=x^3$ är en lösning till $y'=3y^{2/3}$, $y(0)=0$. Är lösningen entydig? Motivera!

c) Ange det största intervall i vilket lösningen till ekvationen $y'=3x^2(y^2+1)$,$y(0)=1$ existerar. Är lösningen entydig? Motivera!

<u>Lösning:</u>

a)

En lösning är $y\equiv 0$ och den är entydig, ty $f(x,y)=y^3$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2$ är kontinuerliga.

b)

Lösningen är ej entydig, ty en lösning är $y=x^3$ och en annan lösning är $y\equiv 0$.

c)

Vi börjar med att lösa differentialekvationen, vilken är separabel.

Omformning ger: $\dfrac{1}{y^2+1}y'=3x^2$.

Integrera map x: $\arctan y=x^3+C$. Villkoret ger: $C=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

Differentialekvationens lösning ges av: $y=\tan(x^3+\dfrac{\pi}{4})$.

Det definitionsområde som innehåller $x=0$ är:

$$\left\{x:-\frac{\pi}{2}<x^3+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\right\}=\left\{x:-\frac{3\pi}{4}<x^3<\frac{\pi}{4}\right\}=\left\{x:-\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}<x<\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}\right\}$$

Lösningen är entydig, ty $f(x,y)=3x^2(y^2+1)$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}=6x^2y$ är kontinuerliga.

SVAR: a) Entydig lösning. b) Ej entydig lösning.

c) Det största intervallet i vilket lösningen existerar är $\left\{x:-\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}<x<\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}\right\}$. Entydig lösning.

12. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella matriselement. Ett egenvärde till matrisen $\mathbf{A}$ är $\lambda=\alpha+i\beta$, där $\alpha\in R$ och $\beta\in R$. Tillhörande egenvektor är $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+i\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är reella vektorer. <u>Härled</u> två reella linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$. Genomför även beräkningarna för matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>

Låt $\mathbf{X}=\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2$ vara en komplex lösning till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$.

Insättning ger: $\mathbf{X}_1'+i\mathbf{X}_2'=\mathbf{A}(\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2)=\mathbf{A}\mathbf{X}_1+i\mathbf{A}\mathbf{X}_2$.

Tag real- respektive imaginärdel: $\begin{cases} \mathrm{Re}: \mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 \\ \mathrm{Im}: \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2 \end{cases}$.

Realdel och imaginärdel av den komplexa lösningen är lösningar till systemet.

En komplex lösning ges av $\mathbf{X} = e^{(\alpha + i\beta)t}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2)$.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}: \mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\cos\beta t - \mathbf{v}_2\sin\beta t) \\ \mathrm{Im}: \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\sin\beta t + \mathbf{v}_2\cos\beta t) \end{cases}$$

Observera att de två lösningarna är linjärt oberoende, ty det finns inga konstanter a och b skilda ifrån noll så att $a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$.

Nu över till de numeriska beräkningarna. Vi startar med att bestämma matrisens egenvärden.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 \ , \ \lambda_{1,2} = 4 \pm i3.$$

Bestäm en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda_1 = 4 + i3$.

Insättning av detta egenvärde i systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{X} = e^{(4+i3)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{4t}(\cos 3t + i\sin 3t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Två linjärt oberoende lösningar är: $\begin{cases} \mathrm{Re}\,\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 = e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin 3t\right) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \\ \mathrm{Im}\,\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 = e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 3t\right) = e^{4t}\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} \end{cases}$.

Vi kontrollerar det linjära oberoendet genom att visa att Wronskianen är skilt ifrån noll.

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{4t}\cos 3t & e^{4t}\sin 3t \\ e^{4t}\sin 3t & -e^{4t}\cos 3t \end{vmatrix} = -e^{8t} \neq 0 .$$

SVAR: Två linjärt oberoende lösningar ges av $\begin{cases} \mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\cos\beta t - \mathbf{v}_2\sin\beta t) \\ \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\sin\beta t + \mathbf{v}_2\cos\beta t) \end{cases}$.

Numeriskt erhålles: $\mathbf{X}_1 = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^{4t}\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix}$.

13. P är en två gånger deriverbar funktion som uppfyller $P(0) = P'(0) = 0$. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + P'(x)y' + P''(x)y = P''(x)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

<u>Lösning:</u>

Den givna differentialekvationen kan skrivas $y'' + (P'(x)y)' = P''(x)$.

Integrera med avseende på x : $y' + P'(x)y = P'(x) + C_1$. Villkoren ger $C_1 = 0$.

Vår differentialekvation är linjär av första ordningen och har formen $y' + P'(x)y = P'(x)$.

Bestäm en integrerande faktor och multiplicera differentialekvationen med denna.

<u>En</u> integrerande faktor ges av $e^{\int P'(x)dx} = e^{P(x)}$; $e^{P(x)}y' + e^{P(x)}P'(x)y = e^{P(x)}P'(x)$.

Omformning ger: $(e^{P(x)}y)' = e^{P(x)}P'(x)$. Integrera med avseende på x : $e^{P(x)}y = e^{P(x)} + C_2$.

Villkoren ger: $C_2 = 1$ vilket insatt i ekvatonen ger $y = 1 + e^{-P(x)}$.

SVAR: Den sökta lösningen ges av $y = 1 + e^{-P(x)}$.

14. Antag att vatten läcker från en kubisk tank, med kantlängden a, genom ett cirkulärt hål i tankens botten. Hålets area är A_h. Den volym vatten som per tidsenhet lämnar vattentanken ges av $cA_h\sqrt{2gh}$, där c $(0 < c < 1)$ är en empirisk konstant. Bestäm differentialekvationen för vattenståndet h. För $t = 0$ är $h = h_0$. Bestäm vattenståndet som funktion av tiden. När är tanken tom?

<u>Lösning:</u>

Låt vattenvolymen vid tiden t ges av $V(t)$. Volymförändringen per tidsenhet är $\dfrac{dV}{dt} = -cA_h\sqrt{2gh}$.

För den kubiska tanken med kantlängden a ges sambandet mellan volymen V och vattenståndet h av $V = ha^2$.

Insättning i differentialekvationen ger: $a^2\dfrac{dh}{dt} = -cA_h\sqrt{2gh}$, $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{cA_h\sqrt{2g}}{a^2}\sqrt{h}$.

Vi inför en konstant $k = \dfrac{cA_h\sqrt{2g}}{a^2}$ varvid differentialekvationen blir $\dfrac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}\dfrac{dh}{dt} = -k$.

Integrera map t: $2\sqrt{h} = -kt + C$, $h = \left(\dfrac{C-kt}{2}\right)^2$. $t = 0$ är $h = h_0$ medför att $C = 2\sqrt{h_0}$,

$$h = \left(\frac{2\sqrt{h_0} - kt}{2}\right)^2.$$

Tanken är tom då $h = 0$ dvs då $t = \dfrac{2\sqrt{h_0}}{k} = \dfrac{2a^2\sqrt{h_0}}{cA_h\sqrt{2g}}$.

SVAR: Differentialekvationen för vattenståndet är $\dfrac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$.

Vattenståndet är $h = \left(\dfrac{2\sqrt{h_0} - kt}{2}\right)^2$.

Tanken är tom då $t = \dfrac{2\sqrt{h_0}}{k}$. Konstanten $k = \dfrac{cA_h\sqrt{2g}}{a^2}$.

15. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\,^0$C och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Detta ger upphov till följande problem:
$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u'_x(\dfrac{\pi}{2},t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

Lösning:

Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} =$ konstant $= \lambda$.

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.
Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.
Dessa är följande: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \quad R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \quad R}$
$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$	$X''(x) = 0$	$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor:

$X(0)T(t) = 0,\ X'(\frac{\pi}{2})T(t) = 0,\ t > 0$.

Dessa skall gälla för alla $t > 0$.

Detta ger: $X(0) = 0,\ X'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X'(x)$.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \quad R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \quad R}$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$
$X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$	$X'(x) = A_2$	$X'(x) = \mu(-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

Insättning av villkoren ger.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \quad R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \quad R}$
$X(0) = A_1 + B_1 = 0$	$X(0) = B_2 = 0$	$X(0) = A_3 = 0$
$X'(\frac{\pi}{2}) = \mu(A_1 e^{\mu\frac{\pi}{2}} - B_1 e^{-\mu\frac{\pi}{2}}) = 0$	$X'(\frac{\pi}{2}) = A_2 = 0$	$X'(\frac{\pi}{2}) = \mu(-A_3 \sin \mu \frac{\pi}{2} + B_3 \cos \mu \frac{\pi}{2}) = 0$
$\begin{cases} B_1 = -A_1 \\ \mu A_1 (e^{\mu\frac{\pi}{2}} + e^{-\mu\frac{\pi}{2}}) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} B_2 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} A_3 = 0 \\ \mu B_3 \cos \mu \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\lambda = -\mu^2,\ \mu \quad R$.
Då erhålles $\mu = 2n + 1$, $n \quad N$ och lösningen har formen $X(x) = B_3 \sin(2n+1)x$.
Motsvarande t-ekvation har lösningen $T(t) = C_3 e^{\lambda t} = C_3 e^{-(2n+1) \ t}$.
Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen $u_n(x,t) = X(x)T(t) = B_3 C_3 \sin(2n+1)x \ e^{-(2n+1) \ t}$.
Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.

Vi erhåller $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(2n+1) \ t} \sin(2n+1)x$.

Det återstår att bestämma koefficienterna.
Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Insättning ger: $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.
Vi får $b_1 = 2$ och $b_3 = 5$. Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 5e^{-49t}\sin 7x$.
SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 5e^{-49t}\sin 7x$.