KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, fredagen den 4 maj 2012, kl 08.30-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Antag att $(x+1)y''+xy'-y=0\ ,\ x>0$. En lösning till denna ekvation är $y(x)=e^{-x}$.
Bestäm allmänna lösningen.
……………………………………………………………………………….………

Lösningsförslag:
En lösning är given. Använd reduktion av ordning.
Insättning av $y=e^{-x}z\ ,\ y'=e^{-x}z'-e^{-x}z\ ,\ y''=e^{-x}z''-2e^{-x}z'+e^{-x}z$ i differentialekvationen ger:
$(x+1)(e^{-x}z''-2e^{-x}z'+e^{-x}z)+x(e^{-x}z'-e^{-x}z)-e^{-x}z=0$, $(x+1)z''+z'(-2(x+1)+x)=0$.
Reducera ordningen. Sätt: $u=z',\ u'=z''$. $(x+1)u'+u(-2-x)=0$

$$\frac{u'}{u}=\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}.$$

Integrera map x: $\ln|u|=x+\ln|x+1|+\ln|C_1|\ ,\ u=\pm C_1(x+1)e^{x}=C_2(x+1)e^{x}\ ,\ z'=C_2(x+1)e^{x}$.
Integrera map x: $z=C_2xe^{x}+C_3$. $y=e^{-x}z=e^{-x}(C_2xe^{x}+C_3)=C_2x+C_3e^{-x}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y=C_2x+C_3e^{-x}$.

2. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\dot{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Vad händer med en partikel som placeras i punkten (1,2) efter lång tid?
……………………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag:
Matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ är triangulär och har egenvärdena 3 och 2.

Tillhörande egenvektorer, $\mathbf{K}$, fås ur ekvationen $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}$

För egenvärdet 3 erhålles $\begin{pmatrix}3-3 & 0\\ 5 & 2-3\end{pmatrix}\mathbf{K}_1=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 5 & -1\end{pmatrix}\mathbf{K}_1=\mathbf{0}$ och $\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$.

För egenvärdet 2 erhålles $\begin{pmatrix}3-2 & 0\\ 5 & 2-2\end{pmatrix}\mathbf{K}_2=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}\mathbf{K}_2=\mathbf{0}$ och $\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X}=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Den enda stationära punkten är origo. Vi har en instabil nod ty egenvärdena är positiva.
En partikel som placeras i punkten (1,2) kommer att avlägsna sig obegränsat från origo .

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X}=c_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat.

3. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet: $\begin{cases}x'=-3x+y^2+2\\ y'=x-y^2\end{cases}$.

……………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag
Bestäm först de kritiska punkterna. I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Tangentvektorn $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x+y^2+2\\ x-y^2\end{pmatrix}$.

Vi erhåller följande icke-linjära ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} -3x + y^2 + 2 \\ x - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x - 3x + 2 = 0 \\ y = \pm x \end{cases}.$$

De kritiska punkterna är: $(1,1)$ och $(1,-1)$.

För att klassificera de kritiska punkterna studeras dessa lokalt. Vi kan då antingen införa ett nytt koordinatssystem med origo i den kritiska punkten och ta med den linjära delen av systemet eller direkt bestämma Jacobimatrisen i den kritiska punkten. Vi väljer det senare.

Tangentvektorn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + y^2 + 2 \\ x - y^2 \end{pmatrix} = g(\mathbf{X})$ ger oss Jacobimatrisen $g'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} -3 & 2y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$.

Insättning av respektive punkt ger oss en matris, vars egenvärden avgör typ och stabilitet.
Egenvärdena λ till en matris $\mathbf{A}$ erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Punkten $(1,1)$ ger $\mathbf{g}'(1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4)$.

Skilda reella egenvärden som är negativa innebär att den kritiska punkten är en stabil nod.

Punkten $(1,-1)$ ger $\mathbf{g}'(1,-1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 4 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$.

Skilda reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

SVAR: $(1,1)$ är en stabil nod. $(1,-1)$ är sadelpunkt och därmed instabil.