

SF1633 Differentialekvationer I.

MODULUPPGIFTER 3.

Fourierserier, partiella differentialekvationer och laplacetransformer.

1. Undersök om funktionsföljden $\{1, \cos nt, \sin nt\}$ där $m = 1, 2, \dots$ och $n = 1, 2, \dots$ är ortogonal på intervallet $(-\pi, \pi)$. Uttryck därefter den 2π -periodiska funktionen f med hjälp av denna funktionsföljd då $f(t) = t$, $-\pi < t < \pi$.

2.a. Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, 3$, utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0, \pi]$.

2.b. Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0, \pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.

2.c. Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie.

Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.

3. För den 2π -periodiska funktionen f gäller att: $f(t) = \pi^2 - t^2$, $-\pi < t < \pi$.

Bestäm f 's fourierserie.

Använd sedan den erhållna serien för att beräkna summorna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

4. Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x$, $-1 < x < 1$.

Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = 1$.

5. I ett tabellverk hittar man att $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$ är lika med $\frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2)$, då $0 < x < 1$.

Beräkna $s(-8/3)$.

6. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

7. Bestäm allmänna lösning till differentialekvationen $y' + 5y = f(x)$,

där $f(x + 2\pi) = f(x)$ och $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$.

8. Bestäm genom variabelseparation den lösning till den partiella differentialekvationen

$u_x = u_y + u$ som uppfyller villkoret $u(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$.

9. Lös den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i området $0 < x < \pi$, $t > 0$

med randvillkoren $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ och

begynnelsevillkoren $u(x, 0) = \sin 2x + 4 \sin 4x$ och $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

10. Lös följande variant av värmeledningsproblemet: $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0$, $t > 0$

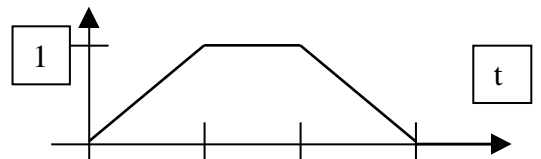
$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 + 3\cos x), \quad 0 < x < \pi$$

11. Lös begynnelsevärdesproblemet:
- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
- $$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$
- $$u(x, 0) = \sin x + 10 \sin 3x, \quad 0 < x < \pi$$

12. Låt $u(x, y)$ beteckna den stationära temperaturfördelningen i en tunn kvadratisk platta $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, (u uppfyller alltså Laplaces' ekvation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$) med randvillkoren $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$ och $u(x, 1) = \cos 4\pi x$.
Bestäm temperaturen i mittpunkten $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

13. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i $x = 0$ och $x = 1$. Vid tiden $t = 0$ befinner den sig i vila men utsätts för ett hammarslag som ger den en begynnelsehastighet av $g(x) = h$, $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$.
 0 , för övrigt
Bestäm förflyttningen $u(x, t)$ då vågekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ satisfieras.

14. Bestäm Laplacetransformen för funktionen vars graf ritats här bredvid.
Grafen består av tre rätta linjestycken för $0 \leq t \leq 3$.
För $t > 3$ är $f(t) = 0$.



15. Lös för $t \geq 0$ ekvationen $y'' + 6y' + 13y = e^{-3t} \sin 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
16. Lös integralekvationen $y(t) + 3 \int_0^t \sin(t-u)y(u)du = t$.
17. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 4y = (8t-4)U(t-1)$, $t > 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
Här är $U(t)$ Heavisides språngfunktion ("the unit step-function", $U(t) = 1$ för $t \geq 0$ och $U(t) = 0$ för $t < 0$).
18. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = \delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 $\delta(t-1)$ är Diracs deltafunktion.
19. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 13y = 3\delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
20. Laplacetransformen ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ under lämpliga villkor.
Vilka av följande påståenden är korrekta? Bevis eller motexempel krävs.
- a) $L\{t^2\} = \{L\{t\}\}^2$ b) $L\{2t\} = 2L\{t\}$
c) $L\{t+t^2\} = L\{t\}L\{t^2\}$ d) $L\{t+t^2\} = L\{t\} + L\{t^2\}$

e) f är styckvis kontinuerlig för $t > 0$ och av exponentiell ordning. $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ där $F(s) = L\{f(t)\}$.

21. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-\tau} f(t - \tau) d\tau$.

22. Beräkna $y(t)$ för $t > 0$ då $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 5$, där $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 4 \sin t, & t > \pi \end{cases}$.

23. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y = 60\delta(t - 3)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 10$.

LEDNINGAR:

- Hur definieras ortogonalitet mellan funktioner?
- Se 1. Utnyttja trigonometriska funktioner. Hur ser respektive serie ut?
- För summorna användes lämpligt t -värde.
- Vad konvergerar fourierserien mot?
- Utnyttja cosinusseriens egenskaper.
- Här är en funktion utvecklad i en sinusserie.
- Utveckla f i en fourierserie då en partikulärlösning skall bestämmas. Ansätt en partikulärlösning på samma form.
- Använd superposition.
- 9-12. Använd variabelseparation och identifiering.
- Använd variabelseparation och fourierserietveckling.
- Bestäm de räta linjernas ekvationer.
- 15-19. Laplacetransformera.
20. Utnyttja integralens egenskaper.
- 21-23. Laplacetransformera.

SVAR:

$$1. \langle 1, \cos mt \rangle = 0 \quad \langle 1, \sin nt \rangle = 0 \quad \langle \cos mt, \sin nt \rangle = 0 \quad \langle \cos mt, \cos st \rangle = 0$$

$$\langle \sin mt, \sin nt \rangle = 0 \quad t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

$$2. a) \langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0 \quad b) \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad c) \text{Fourierserien: } \frac{0^2 + 1 + 3^2 + 1}{2} = \frac{11}{2},$$

$$\text{cosinusserien: } \frac{0^2 + 1 + 0^2 + 1}{2} = 1, \quad \text{sinusserien: } \frac{0^2 + 1 - (0^2 + 1)}{2} = 0.$$

$$3. f(t) \sim \frac{2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt, \quad \frac{1}{n^2} = \frac{2}{6} \quad \text{och} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{2}{12}.$$

$$4. f(x) \sim \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x$$

$$\text{Fourierseriens summa för } x = 1 \text{ blir medelvärdet } \frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1.$$

$$5. s(-8/3) = -\frac{\pi^2}{18}$$

$$6. b_n = 0, n \text{ jämnt och } b_n = \frac{4n}{(n^2 - 4)}, n \text{ udda}$$

$$7. y = y_h + y_p = A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2 - 5)} \sin nx$$

$$8. u(x,0) = 3e^{-5x-6y} + 2e^{-3x-4y}$$

$$9. u(x,t) = \cos 4t \sin 2x + 4 \cos 8t \sin 4x$$

$$10. u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-t} \cos x$$

$$11. u(x,t) = \sin x e^{-t} + 10 \sin 3x e^{-9t}$$

$$12. u(x,y) = \frac{e^{4y} - e^{-4y}}{e^4 - e^{-4}} \cos 4x \quad u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^2 + e^{-2}}$$

$$13. u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{(n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \sin n\pi x \sin n\pi t$$

$$14. F(s) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})$$

$$15. y(t) = \frac{1}{8} e^{-3t} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$$

$$16. y(t) = \frac{1}{4} t + \frac{3}{8} \sin 2t$$

$$17. y(t) = e^{-2t} + U(t-1)(2(t-1) - 1 + e^{-2(t-1)})$$

$$18. y(t) = \cos t + U(t-1) \sin(t-1)$$

$$19. y(t) = e^{-2t} (-e^{2\pi} \sin 3t U(t-\pi) + \cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t)$$

20. a) och c) är falska, b), d) och e) är sanna.

$$21. f(t) = \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

$$22. y(t) = 7 \cos t + 5 \sin t - \frac{1}{2} \{ \sin(t-\pi) - (t-\pi) \cos(t-\pi) \} U(t-\pi)$$

$$23. y(t) = 5e^{2t} + 15U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{-2(t-3)})$$