Lösningsförslag till kompletteringstentamen
SF1633 Differentialekvationer I.
SF1637 Differentialekvationer och transformer III.
Måndagen den 14 november 2011, kl 1630-1730.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$ som uppfyller villkoret $\mathbf{y}(1) = \quad 2$.

Lösning:

Vi omformar differentialekvationen genom division med y^2. Då erhålles $2x^2 y^{\ \ 2}\frac{dy}{dx} = 3xy^{\ \ 1} + 1$.

Derivering av $z = y^{\ \ 1}$ med avseende på x ger $z \ = \quad y^{\ \ 2}y$.

Insättning i differentialekvationen ger $2x^2(\quad z\ ) = 3xz + 1$ vilken omformas till $z\ + \frac{3}{2x}z = \quad \frac{1}{2x^2}$.

Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen. Bestäm en integrerande faktor.

En integrerande faktor ges av $e^{\ \frac{3}{2x}dx} = e^{\frac{3}{2}\ln x} = x^{\frac{3}{2}}$.

Multiplicera differentialekvationen med integrerande faktor.

$x^{\frac{3}{2}}z\ + \frac{3}{2x}x^{\frac{3}{2}}z = \quad \frac{1}{2x^2}x^{\frac{3}{2}}$, $\frac{d}{dx}\ \ x^{\frac{3}{2}}z\ \ = \quad \frac{1}{2}x^{\ \frac{1}{2}}$. Integration ger: $x^{\frac{3}{2}}z = \quad x^{\frac{1}{2}} + C$.

Substitutionen ger $x^{\frac{3}{2}}y^{\ \ 1} = \quad x^{\frac{1}{2}} + C$. Bestäm integrationskonstanten.

Villkoret ger $(\quad 2)^{\ \ 1} = \quad 1 + C$, $C = \frac{1}{2}$. Vi löser ut den sökta funktionen.

$x^{\frac{3}{2}}y^{\ \ 1} = \quad x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$, $y^{\ \ 1} = \quad x^{\ \ 1} + \frac{1}{2}x^{\ \ \frac{3}{2}} = \frac{1\quad 2x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}}}$, $y = \frac{2x\sqrt{x}}{1\quad 2\sqrt{x}}$. Lösningen är definierad för $x > \frac{1}{4}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{2x\sqrt{x}}{1\quad 2\sqrt{x}}$.

Modul 2.

Betrakta systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}\ \ = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{X}$.

Bestäm de kritiska punkterna. Avgör typ och stabilitet/instabilitet.
Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(5, 6)$.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma kritiska punkter. De erhålles då hastighetsvektorn $\mathbf{X}\ \ = \mathbf{0}$
Den enda kritiska punkten är origo, ty matrisens determinant är skild ifrån noll.

Vi bestämmer egenvärden till matrisen $\mathbf{A} = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} \qquad \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 \qquad & 2 \\ 4 & 1 \qquad \end{vmatrix} = \ \ ^2 \quad 2 \quad + 5 = (\qquad 1)^2 + 4$$

Egenvärdena är komplexa och lika med $_{1,2} = 1 \pm 2i$. Det är komplexa egenvärden med positiv realdel.
Det innebär att den stationära lösningen (kritiska punkten) är en instabil spiral.
En partikel som placeras i punkten $(5, 6)$ kommer att avlägsna sig obegränsat från origo.

SVAR: Den kritiska punkten, origo, är en instabil spiral.
Partikeln avlägsnar sig obegränsat från origo.

Modul 3.

Betrakta den $2\quad$ -periodiska funktionen f då $f(t) = t^2, \qquad < t < \quad$.

Bestäm utgående från f:s fourierserie seriesumman $\displaystyle {}_{n=1}\frac{1}{n^2}$.

<u>Lösning:</u>
Den givna funktionen f är en jämn funktion.

Fourierserien är på formen $\displaystyle \frac{a_0}{2} + {}_{n=1} a_n \cos nt$, där $\displaystyle a_0 = \frac{2}{\ }\ {}_0 f(t)dt$ och $\displaystyle a_n = \frac{2}{\ }\ {}_0 f(t)\cos ntdt$.

Vi beräknar integralerna.

$$a_0 = \frac{2}{\ }\ {}_0\ t^2 dt = \frac{2}{\ }\ \frac{^3}{3} = \frac{2\ ^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\ }\ {}_0\ t^2 \cos ntdt = \frac{2}{\ } + t^2 \frac{\sin nt}{n}\ {}_0\ \ {}_0\ 2t\frac{\sin nt}{n}dt\ - = \frac{2}{\ } +0 + 2t\frac{\cos nt}{n^2}\ {}_0\ \ {}_0\ 2\frac{\cos nt}{n^2}dt\ -$$

$$a_n = \frac{2}{\ }\ \underset{+}{2}\ \frac{\cos n}{n^2} + 2\frac{\sin nt}{n^3}\ {}_0 - = \frac{2}{\ }2\ \frac{\cos n}{n^2} = \frac{4\cos n}{n^2}$$

Funktionen f tilldelas fourierserien $\displaystyle f \sim \frac{^2}{3} + {}_{n=1}\frac{4\cos n}{n^2}\cos nt$.

För $t =$ erhålles $\displaystyle ^2 = \frac{^2}{3} + {}_{n=1}\frac{4\cos n}{n^2}\cos n$ □

□ $\cos n = (\ \ 1)^n$ vilket ger $\displaystyle \frac{2\ ^2}{4\ \ 3} = {}_{n=1}\frac{(\ \ 1)^{2n}}{n^2}$.

Den sökta seriesumman blir $\displaystyle {}_{n=1}\frac{1}{n^2} = \frac{^2}{6}$.

SVAR: Den sökta seriesumman blir $\displaystyle {}_{n=1}\frac{1}{n^2} = \frac{^2}{6}$.