KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
SF1637, Differentialekvationer och transformer III.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 26 september 2011, kl 1030-11.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. En lösning till differentialekvationen $x^2y'' - xy' - 3y = 0,\ x > 0$ ges av $y_1 = x^3$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3,\ x > 0$.
Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 5$.

....

Lösningsförslag:

Vi använder metoden "reduktion av ordning".
Ansätt $y = x^3z,\ y' = x^3z' + 3x^2z,\ y'' = x^3z'' + 6x^2z' + 6xz$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger
$x^2\left\{x^3z'' + 6x^2z' + 6xz\right\} - x\left\{x^3z' + 3x^2z\right\} - 3\left\{x^3z\right\} = 4x^3$
Förenkla $x^5z'' + 5x^4z' = 4x^3$
Nu kan vi antingen sätta $u = z',\ u' = z''$ och därigenom reducera ordning.
Vi får då $x^5u' + 5x^4u = 4x^3$ vilken kan lösas med hjälp av integrerande faktor.
Ett annat alternativ är att konstatera att vänstra ledet är en derivata och integrera med avseende på x. Vi får $x^5z' = x^4 + C_1$ och $z' = x^{-1} + C_1x^{-5}$.
Integrera med avseende på x. $z = \ln x + \dfrac{C_1}{-4x^4} + C_2 = \ln x + \dfrac{C_3}{x^4} + C_2$.
Den allmänna lösningen är $y = x^3\left(\ln x + \dfrac{C_3}{x^4} + C_2\right) = x^3\ln x + \dfrac{C_3}{x} + C_2x^3$.
För att bestämma den lösning som uppfyller villkoren behöver vi förstaderivatan.
$y' = 3x^2\ln x + x^2 - \dfrac{C_3}{x^2} + C_2 3x^2$
Insättningen av villkoren ger: $\begin{cases} 0 = y(1) = 0 + C_3 + C_2 \\ 5 = y'(1) = 0 + 1 - C_3 + C_2 3 \end{cases}$ vilket har lösningen $\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_3 = -1 \end{cases}$.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y = x^3\ln x + \dfrac{C_3}{x} + C_2x^3$.
Den lösning som uppfyller villkoren är $y = x^3\ln x - \dfrac{1}{x} + x^3$.

2. En linjär differentialekvation har omformats med hjälp av substitutionen $x = y'$.
Då har följande linjära ekvationssystem erhållits $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Bestäm den allmänna lösningen. Bestäm även $\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ då $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

....

Lösningsförslag:

Vi bestämmer egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$.

Vi erhåller egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$. Nu över till egenvektorerna.
De erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

$\underline{\lambda_1 = -1}$ ger $\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 1 & -(-1) \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 2}$ ger $\begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösningarna till systemet är på formen $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{K}$.

Vi bildar linjärkombinationer av sådana lösningar och erhåller den allmänna lösningen.

$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. OBS ! $x = y'$.

Den lösning som går genom punkten $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ges av $\mathbf{X}(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Då blir $\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0}$

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

3. Bestäm de stationära lösningarna till det icke-linjära systemet $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2+1)y \\ x^2+2y-1 \end{pmatrix}$.

Bestäm deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgör om de är stabila/instabila.

....

<u>Lösningsförslag:</u>

Bestäm först de stationära lösningarna. De erhålles då hastighetsvektorn $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Första ekvationen ger $y = 0$ vilket insatt i den andra ekvationen ger $x = \pm 1$.
De stationära lösningarna är $(1,0)$ och $(-1,0)$.
Deras karaktär bestämmes med hjälp av linjarisering av det icke-linjära systemet.
Insättning av respektive stationär punkt i Jacobimatrisen ger en konstant matris
vars egenvärden bestämmes. Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2+1 \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$.

$\underline{(1,0)}$ ger $\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A_1}$ vi får $0 = \det(\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = (\lambda-1)^2 - 5$.

Reella egenvärden med skilda tecken. Sadelpunkt vilken är instabil.

$\underline{(-1,0)}$ ger $\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2$ vi får $0 = \det(\mathbf{A}_2 - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = (\lambda-1)^2 + 3$.

Komplexa egenvärden med positiv realdel. Instabil spiralpunkt.
Detta gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: De stationära lösningarna är $(1,0)$ och $(-1,0)$.
$\underline{(1,0)}$ är en sadelpunkt vilken är instabil och $\underline{(-1,0)}$ är en instabil spiralpunkt.