KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
SF1637, Differentialekvationer och transformer III.
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 12 september 2011, kl 1030-11.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1.
Bestäm den lösning, $y = y(t)$, till differentialekvationen $6y \; = y^2 \quad 9$, som uppfyller villkoret $y(0) = 4$. Ange även lösningens existensintervall.
....
Lösningsförslag:
Den givna differentialekvationen är separabel. Vi börjar med att bestämma alla lösnigarna.
Först får vi konstantlösningarna. Dessa erhålles då derivatan är lika med noll.
Lösningarna är $y = \pm 3$. Dock uppfyller de inte det givna villkoret.

Med $y \quad 3$ skriver vi om differentialekvationen: $\dfrac{6y}{(y+3)(y \quad 3)} = 1$.

Partialbråksuppdelning ger $\left(\dfrac{1}{y+3} + \dfrac{1}{y \quad 3}\right) y \; = 1$.

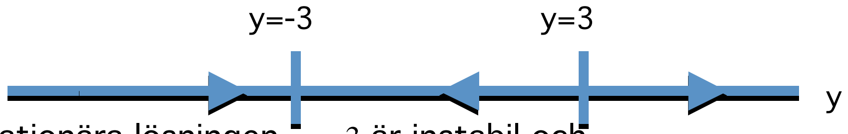
Integrera med avseende på t: $\ln|y+3| + \ln|y \quad 3| = t + \ln|C_1|$. Förenkling ger : $\dfrac{y \quad 3}{y+3} = Ce^t$.

Bestäm konstanten C.
Villkoret ger: $C = \dfrac{4 \quad 3}{4+3} = \dfrac{1}{7}$ vilket insättes i $\dfrac{y \quad 3}{y+3} = Ce^t$ och vi får $\dfrac{y \quad 3}{y+3} = \dfrac{e^t}{7}$. Lös ut y:

$7y \quad 21 = ye^t + 3e^t$, $(7 \quad e^t)y = 21 + 3e^t$, $y = \dfrac{3(7+e^t)}{7 \quad e^t}$.
Här skall $7 \quad e^t$ vara skilt ifrån noll. Det ger $t \quad \ln 7$.
Existensintervallet är det delintervall som innehåller $t = 0$. Vi får $\{t : t < \ln 7\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \dfrac{3(7+e^t)}{7 \quad e^t}$.
Existensintervallet är $\{t : t < \ln 7\}$.

2.
Bestäm de stationära lösningarna (jämviktslösningarna) till differentialekvationen $6y \; = y^2 \quad 9$.
Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de stationära lösningarna.
Undersök $y = y(t)$ då t växer från $t = 0$ för alla startvärden $y(0)$.
....
Lösningsförslag:
De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll. Vi har $y = \pm 3$
Vi studerar derivatans tecken.
För $y > 3$ är $y \; > 0$ och funktionen växande.
För $\quad 3 < y < 3$ är $y \; < 0$ och funktionen avtagande.
För $y < \quad 3$ är $y \; > 0$ och funktionen växande.
Funktionens uppförande illustreras i den endimensionella faslinjen.



Den stationära lösningen $y = 3$ är instabil och
den stationära lösningen $y = -3$ är asymptotiskt stabil.

För startvärden $y(0) < 3$ är gränsvärdet för $y = y(t)$ lika med -3.
För startvärdet $y(0) = 3$ är gränsvärdet för $y = y(t)$ lika med 3.
För startvärden $y(0) > 3$ växer $y = y(t)$ obegränsat.
SVAR: De stationära lösningarna är $y = \pm 3$.

Den stationära lösningen $y = 3$ är instabil och
den stationära lösningen $y = -3$ är asymptotiskt stabil.
För startvärden $y(0) < 3$ är gränsvärdet för $y = y(t)$ lika med -3.
För startvärdet $y(0) = 3$ är gränsvärdet för $y = y(t)$ lika med 3.
För startvärden $y(0) > 3$ växer $y = y(t)$ obegränsat.

3.
En 200 liters tank innehåller 40 liter rent vatten.
En saltlösning med 0,25 kg salt per liter pumpas in med en hastighet av 16 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 8 liter per minut.
När är tanken full ? Bestäm även saltmängden i tanken vid detta tillfälle.
Lösningsförslag:
Tanken blir full då $200 = 40 + t(16 - 8)$ dvs efter 20 minuter.
För att bestämma saltmängden i tanken ställer vi upp en differentialekvation för saltmängden
Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tidpunkten t

Förändringen av saltmängden per tidsenhet ges av $\dfrac{dS(t)}{dt} = 0,25 \cdot 16 - \dfrac{S(t)}{40 + (16 - 8)t} \cdot 8$.

Förenkling ger: $\dfrac{dS(t)}{dt} + \dfrac{S(t)}{5+t} = 4$, vilket är en linjär differentialekvation av första ordningen.
Bestäm en integrerande faktor och multiplicera ekvationen med denna.

En integrerande faktor är $e^{\int \frac{dt}{5+t}} = e^{\ln(5+t)} = 5 + t$.

$$(5+t)\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 4(5+t)$$

Det nya vänstra ledet kan skrivas som en derivata.

$$\frac{d}{dt}\big((5+t)S(t)\big) = 4(5+t)$$

Integrera med avseende på t: $(5+t)S(t) = 2(5+t)^2 + C$.
Bestäm C. Villkoret $S(0) = 0$ ger $C = -50$.

Saltmängden i tanken vid tidpunkten t ges av $S(t) = \dfrac{2(5+t)^2 - 50}{5+t} = \dfrac{2t^2 + 20t}{5+t}$.

Då tanken är full är saltmängden lika med $S(20) = \dfrac{2 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20}{5+20} = 48$ kg.

SVAR: Tanken är full efter 20 minuter och då är saltmängden 48 kg.