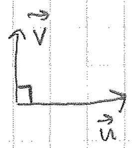
13-1

Avsnitt 5.1: Ortogonala projektioner och ortonormala baser

Kom ihåg i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$:

- ⋆ $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är <u>ortogonala</u> om $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



- ⋆ <u>Längden</u> av $\vec{u}$ är $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- ⋆ $\vec{u}$ är en <u>enhetsvektor</u> om $|\vec{u}| = 1$

Vi använder dessa definitioner även i $\mathbb{R}^n$ för allmänt n.

<u>Exempel</u>. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

Då är $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 0$,

så $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala;

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 1^2 + 2^2 + 0^2 + (-3)^2 = 14,$$

så $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{14}$;

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} = 1,$$

så $|\vec{w}| = 1$, dvs $\vec{w}$ är en enhetsvektor.

Normering av vektorn $\vec{u}$: $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$, en enhetsvektor.

Exempel. Normering av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ ger $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

13-2

Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ är <u>ortonormala</u> om de är ortogonala och normerade:

(1) $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ om $i \neq j$

(2) $|\vec{u}_i| = 1 \Leftrightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$ för alla i.

Standardexempel: standardbasen i $\mathbb{R}^n$

$$n=4: \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Annat exempel: $\begin{bmatrix}3/5\\4/5\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4/15\\3/15\\10/15\\-10/15\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Dessa har längd 1 och är parvis ortogonala, dvs ortonormala.

Exempel: $\begin{bmatrix}3/5\\4/5\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-4/15\\3/15\\10/15\\-10/15\end{bmatrix} = \frac{3}{5}\left(-\frac{4}{15}\right) + \frac{4}{15}\left(\frac{3}{15}\right) + 0 \cdot \frac{10}{15} + 0\left(-\frac{10}{15}\right) = 0$

Ortonormala vektorer fungerar på samma sätt som standardbasen.

$\mathbb{R}^3$:

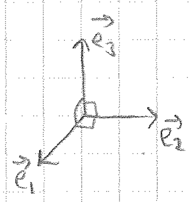
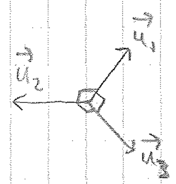


Bild att ha i huvudet: ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem, dock roterat eller speglat.



13-3

Ortonormala vektorer är linjärt oberoende.

Låt nämligen $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ vara ortonormala.
Anta att vi kan uttrycka en av dem, säg $\vec{u}_k$,
som en linjärkombination av de övriga:

$$\vec{u}_k = x_1 \vec{u}_1 + \cdots + x_{k-1} \vec{u}_{k-1}$$

Då är även

$$\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k = \vec{u}_k \cdot \overbrace{(x_1 \vec{u}_1 + \cdots + x_{k-1} \vec{u}_{k-1})}^{\vec{u}_k}$$

Men $\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k = \boxed{1}$, medan

$$\vec{u}_k \cdot (x_1 \vec{u}_1 + \cdots + x_{k-1} \vec{u}_{k-1}) = x_1 \underbrace{(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_1)}_{0} + \cdots + x_{k-1} \underbrace{(\vec{u}_k \cdot u_{k-1})}_{0} = \boxed{0}$$

$1 = 0$ är omöjligt! Motsägelse.

Konsekvens: n ortonormala vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar en bas för $\mathbb{R}^n$.

Exempel $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$ är en bas

för $\mathbb{R}^3$, ty vektorerna i basen är ortonormala (kontrollera).

Ortonormal bas för ett delrum V = en bas för V bestående av ortonormala vektorer

13-4

Koordinatvektorn i en ortonormal bas

Låt $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ vara en ortonormal bas för ett delrum V till $\mathbb{R}^n$.
Låt $\vec{y}$ vara en vektor i V. Då har $\vec{y}$ koordinatvektorn

$$\begin{bmatrix} \vec{y}\cdot\vec{u}_1 \\ \vec{y}\cdot\vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{y}\cdot\vec{u}_k \end{bmatrix}$$ i basen B.

Alltså: $\vec{y} = (\vec{y}\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{y}\cdot\vec{u}_2)\vec{u}_2 + \dots + (\vec{y}\cdot\vec{u}_k)\vec{u}_k$

Exempel. Koordinatvektorn för $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\vec{u}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}}_{\vec{u}_3} \right\}$$ är $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, där

$$\begin{cases} x_1 = \vec{y}\cdot\vec{u}_1 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-1)\cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \vec{y}\cdot\vec{u}_2 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_3 = \vec{y}\cdot\vec{u}_3 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + (-1)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Alltså är $[\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} + \frac{4}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

13-5

Varför $\vec{y}\cdot\vec{u}_i$ i koordinatvektorn?

Jo, anta att $\vec{y} = x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_k\vec{u}_k$.

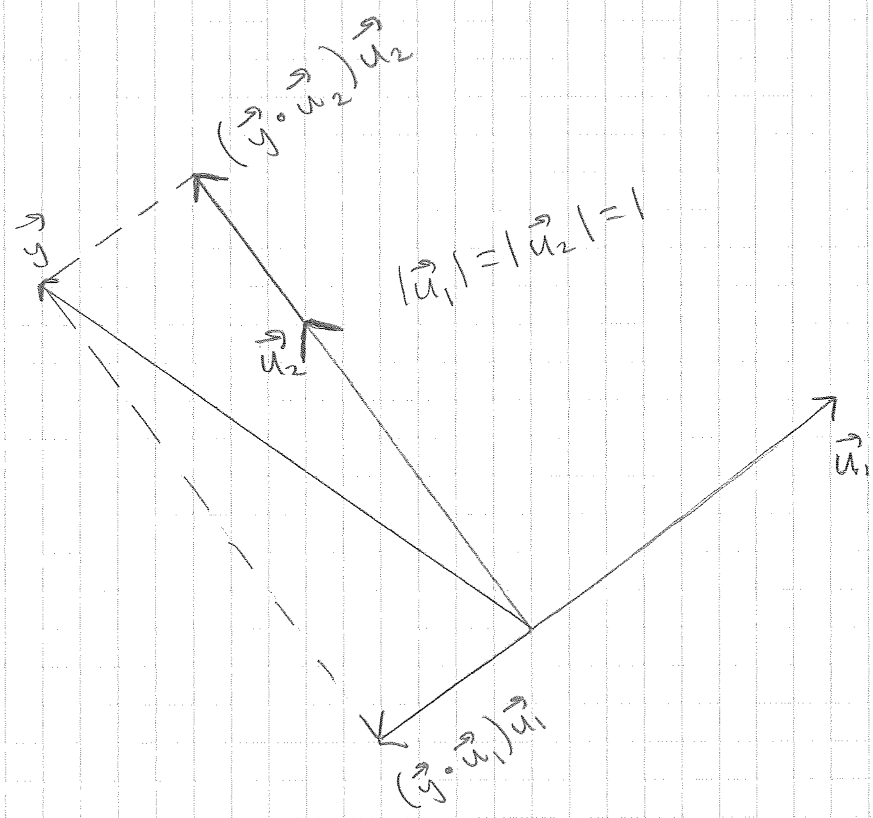
Då är $\vec{y}\cdot\vec{u}_1 = \underbrace{(x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_k\vec{u}_k)\cdot\vec{u}_1}$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{y}\cdot\vec{u}_1 = x_1\underbrace{(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1)}_{=1} + x_2\underbrace{(\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1)}_{=0} + \cdots + x_k\underbrace{(\vec{u}_k\cdot\vec{u}_1)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{y}\cdot\vec{u}_1 = x_1$$

På samma sätt: $\vec{y}\cdot\vec{u}_i = x_i$ för alla i

Geometrisk tolkning: $(\vec{y}\cdot\vec{u}_i)\vec{u}_i$ är projektionen av $\vec{y}$ på linjen med riktningsvektor $\vec{u}_i$



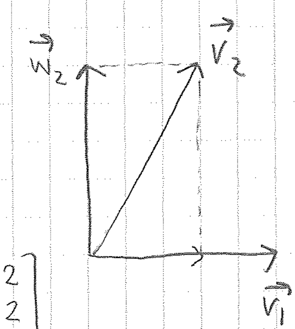
13-6

Avsnitt 5.2 (resten av avsnitt 5.1 på föreläsning 14)

Gram-Schmidt-metoden för att hitta en ortonormal bas.

Exempel. Konstruera en ortonormal bas för det plan i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lösning. Gör om $\vec{v}_2$ genom att subtrahera projektionen av $\vec{v}_2$ på $\vec{v}_1$:



$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \cdot \vec{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sätt $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$. Vi har att $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonala. $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ är alltså en ortogonal bas för planet

Normering ger en ortonormal bas:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{w}_1|} \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}_2|} \vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en ortonormal bas.

Obs: svaret är inte unikt (finns många möjliga svar).

Liten parentes. I föregående exempel hade vi två baser:

* En ortonormal bas: $\left\{ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \vec{u}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} \right\}$

* En annan bas: $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$

Anta att $\vec{y}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

$$\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2.$$

Vad blir $\vec{y}$:s koordinatvektor i basen $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$?

Lösning. Eftersom $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ är ortonormal, har vi att

$$\vec{v}_1 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 = \sqrt{2}\,\vec{u}_1 + 0\,\vec{u}_2$$
$$\vec{v}_2 = (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 = 2\sqrt{2}\,\vec{u}_1 + 3\,\vec{u}_2$$

Alltså är $\vec{y} = x_1\overbrace{\left(\sqrt{2}\,\vec{u}_1\right)}^{\vec{v}_1} + x_2\overbrace{\left(2\sqrt{2}\,\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2\right)}^{\vec{v}_2}$

$$= \left(\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_2\right)\vec{u}_1 + (3x_2)\vec{u}_2$$

Koordinatvektorn i basen $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ är alltså

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_2\\ 3x_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 0 & 3\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Basbytesmatris}\\ \text{från "}\vec{v}\text{-basen" till "}\vec{u}\text{-basen"}}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Observera att $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{u}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_1\cdot\vec{v}_2\\ \vec{u}_2\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_2\cdot\vec{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}- \vec{u}_1 -\\ - \vec{u}_2 -\end{bmatrix}\begin{bmatrix}| & |\\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2\\ | & |\end{bmatrix}$

Denna form p.g.a. att $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ är ortonormal.

13-8

Exempel Konstruera en ortonormal bas för det delrum till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\3\\3\\1\end{bmatrix}$$

Lösning. Sätt $\boxed{\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}}$ (av estetiska skäl), och beräkna

$$\vec{v}_2 - \underbrace{\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1}_{\text{proj. av } \vec{v}_2 \text{ på } \vec{w}_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\2\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\4\\0\end{bmatrix}$$

Sätt $\boxed{\vec{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\4\\0\end{bmatrix}}$ (heltal är enklare)

Som i förra exemplet är $\vec{w}_1$ och $\vec{w}_2$ ortogonala.

Gör nu om $\vec{v}_3$ genom att först få vektorn ortogonal mot $\vec{w}_1$ och sedan mot $\vec{w}_2$:

$$\vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2 = \begin{bmatrix}0\\3\\3\\1\end{bmatrix} - \frac{-3}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{15}{1^2+1^2+4^2}}_{\boxed{\frac{15}{18} = \frac{5}{6}}}\begin{bmatrix}1\\1\\4\\0\end{bmatrix}$$

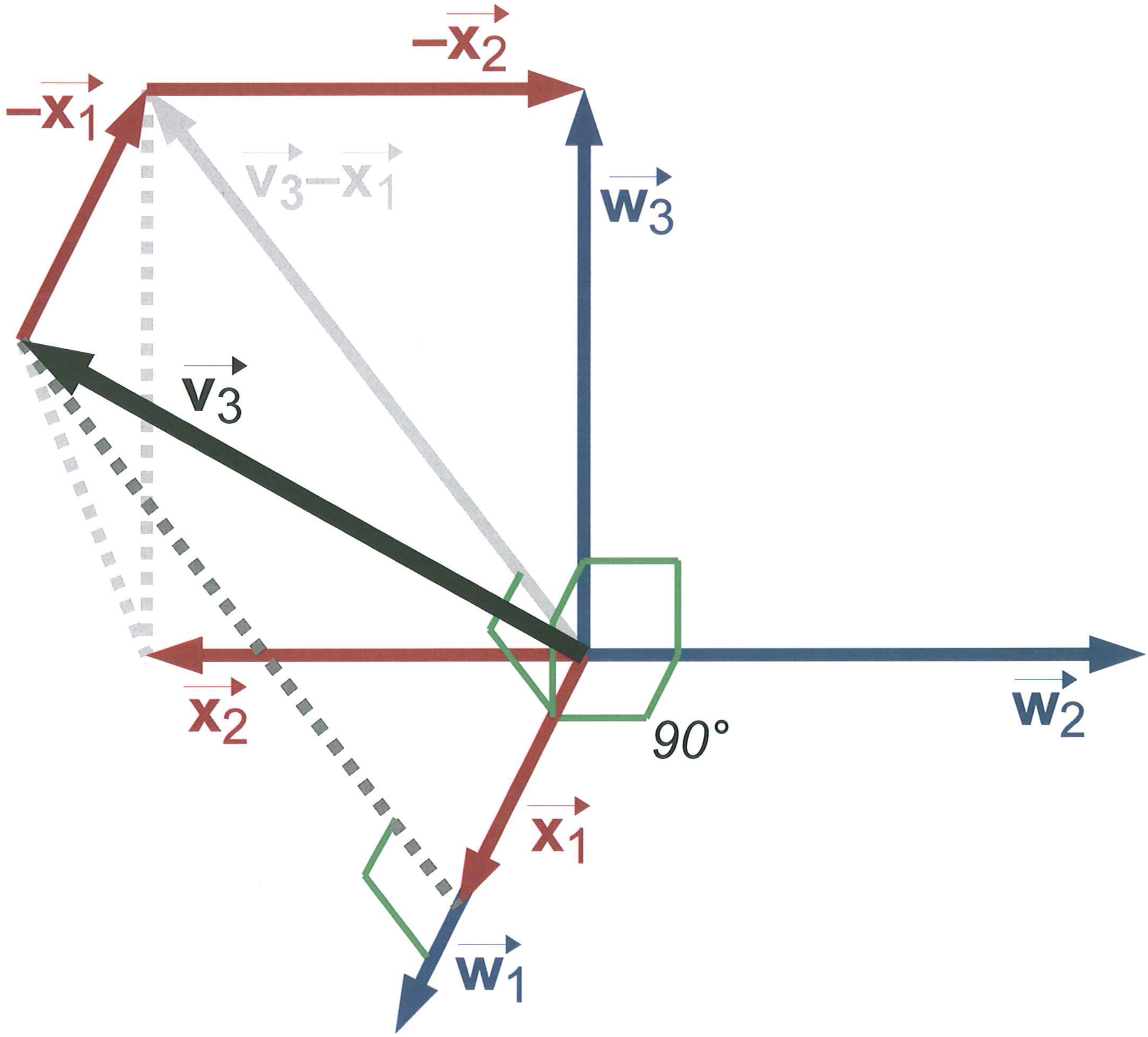
$$= \begin{bmatrix}0\\3\\3\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3/2\\3/2\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5/6\\5/6\\10/3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/6\\4/6\\-1/3\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

Sätt $\boxed{\vec{w}_3 = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\\3\end{bmatrix}}$ $\quad \vec{w}_3$ är ortogonal mot $\vec{w}_1$ och $\vec{w}_2$.

Normering ger $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{w}_1|}\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{w}_2|}\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}1\\1\\4\\0\end{bmatrix}$

och $\vec{u}_3 = \frac{1}{|\vec{u}_3|}\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\\3\end{bmatrix}$.

Svar: En ortonormal bas är $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}1\\1\\4\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\\3\end{bmatrix}\right\}$



$\vec{x_1}$ = projektionen av $\vec{v_3}$ på $\vec{w_1}$

$\vec{x_2}$ = projektionen av $\vec{v_3}$ på $\vec{w_2}$
= projektionen av $\vec{v_3} - \vec{x_1}$ på w_2

$\vec{w_3} = \vec{v_3} - \vec{x_1} - \vec{x_2}$ är ortogonal mot $\vec{w_1}$ och $\vec{w_2}$.

Förutsättning: $\vec{w_1}$ och $\vec{w_2}$ är ortogonala.

13-10

Allmän procedur (Gram-Schmidt)

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ bas för ett delrum V till $\mathbb{R}^n$.

Sätt $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{w}_1}(\vec{v}_2)\,\vec{w}_1 \qquad \mathrm{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}$$

(Snygga eventuellt till $\vec{w}_2$ så vi bara har heltal i $\vec{w}_2$)

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{w}_1}(\vec{v}_3)\,\vec{w}_1 - \mathrm{proj}_{\vec{w}_2}(\vec{v}_3)\,\vec{w}_2$$

$$\vec{w}_4 = \vec{v}_4 - \mathrm{proj}_{\vec{w}_1}(\vec{v}_4)\,\vec{w}_1 - \mathrm{proj}_{\vec{w}_2}(\vec{v}_4)\,\vec{w}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{w}_3}(\vec{v}_4)\,\vec{w}_3$$

Och så vidare!

$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ är ortogonala

Normera varje $\vec{w}_i$ så vi får $\vec{u}_i = \frac{1}{|\vec{w}_i|}\vec{w}_i$

Detta ger en ortonormal bas $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$

Nästa gång: mer material från avsnitt 5.1.