ÖVNINGAR
I
KOMPLEX ANALYS

3. Visa att $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$
Tolka geometriskt.

12. Visa olikheten

$$|e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|$$

7. Bevisa likheten

$$\left|\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{\overline{a}_n z^n + \overline{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \overline{a}_0}\right| = 1 \quad \text{för } |z| = 1.$$

(*) 27. Realdelen till en analytisk funktion är summan av en funktion, som beror enbart av x och en funktion, som beror enbart av y. Visa att den analytiska funktionen är av formen $az^2 + bz + c$, där a är en reell konstant och b och c är konstanter.

30. Visa att $xu_x + yu_y$ är realdel till en analytisk funktion om $u(x,y)$ är det. Till vilken analytisk funktion är den realdel om $u = \operatorname{Re} f(z)$?

31. För vilka reella funktioner f av en reell variabel är $x^3 + x\,f(y)$ realdelen av en analytisk funktion?

50. För vilka värden på z antar sin z, cos z och tan z reella resp rent imaginära värden?

(*) 51. Visa att sin z och cos z enbart kan ha reella nollställen.

88. Beräkna t ex med användande av en primitiv funktion integralen

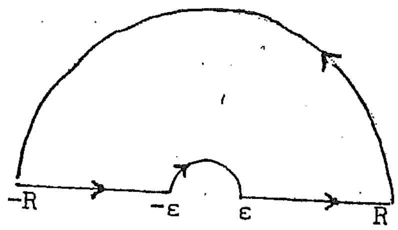
$$\int_2^i \frac{dz}{1-z^2}$$, där integrationsvägen är:

a) den räta linje som förbinder $z = 2$ med $z = i$;

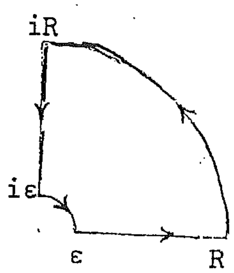
b) sammansatt av halvcirkeln $|z-1| = 1$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ och imaginära axeln;

89. Beräkna $\int_L \log(z+1)dz$ där L är en halvcirkelbåge i övre halvplanet med radien 1 och medelpunkten i $z = -1$. Bågen genomlöps från $z = 0$ till $z = -2$. Med log avses principalgrenen.

91. Beräkna integralen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ genom att integrera funktionen $\frac{e^{iz}}{z}$ över den i fig angivna konturen och sedan låta $R \to \infty$ och $\varepsilon \to 0$.



92. Beräkna $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ genom att integrera funktionen $\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ över den i fig engivna konturen och sedan låta $R \to \infty$ och $\varepsilon \to 0$. Även fig i uppg 91 kan användas.



(*) 93. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2bx\, dx$ genom att integrera e^{-z^2} längs en rektangel med hörnpunkterna i $\pm R$, $\pm R + i\frac{c}{2}$ och sedan låta $R \to \infty$.

94. Bevisa att om $f(z)$ är en hel funktion (dvs en funktion analytisk i hela komplexa talplanet) och om $|f(z)| < M(1 + |z|^n)$ för någon konstant M och för alla z så gäller att $f(z)$ är ett polynom av högst graden n.

96. Kan realdelen till en hel funktion vara begränsad utan att imaginärdelen är det?

99. Sök de singulära punkterna till följande funktioner och därmed konvergensradierna hos Taylorutvecklingarna av dessa efter potenser av $z-a$. Giv även serieutvecklingarna.

a) $\dfrac{1}{z^2+2z+3}$; $a = 0$

(*) b) $\dfrac{1}{1+z^2}$; $a = 2$

c) $\dfrac{\sqrt{1-z}}{1+z^2}$; $a = 0$

d) $-\log z + \int_1^z \dfrac{e^z}{z}\,dz$; $a = 0$

(*) 104. Bevisa olikheten $\left|\dfrac{\sin z}{z}\right| \leq e^{|z|}$ för $z \neq 0$.

105. Utveckla efter potenser av z följande funktioner, medtag de tre första termerna och angiv konvergensradierna:

a) $(\sin z)^3$

b) $e^{\cos z}$

c) $\dfrac{z}{\sin z}$

d) $\tan z$

e) $z \cot z$

106. Finns det någon funktion, analytisk för $|z| < 1$, sådan att $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2n+1}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$?

108. Antag att $f(z)$ är analytisk för $|z| < 1$ och att $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq M$ för $|z| < 1$. Visa att

$|f(z)| \leq M|z|$ för $|z| < 1$. När fås likhet?

Residuer, beräkning av bestämda integraler.

111. Beräkna följande residuer:

(*) a) $\operatorname*{res}_{z=0} (e^{-z} z^{-n-1})$

b) $\operatorname*{res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)}$ om $f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots,\ a_0 \neq 0,$

$g(z) = b_2(z-a)^2 + b_3(z-a)^3 + \ldots,\ b_2 \neq 0$

c) $\operatorname*{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^n}$

d) $\operatorname*{res}_{z=1} (e^z - e)^{-3}$

e) $\operatorname*{res}_{z=-1} \frac{1}{(z^2-1)\sin(z+1)}$

f) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1+\sin z}{1-\cos z^2}$

g) Bestäm alla residuer till $\frac{1}{\sin^3 z}$

h) Bestäm alla residuer till $\frac{1}{z^2 \sin z}$

i) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^{z+z^2}}{\sin^3 z}$

112. Beräkna följande integraler. Integrationsvägarna tas i positiv led.

(*) a) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-2i+1}$

b) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{4z^2+1}$

c) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(e^z-1)^2}$

(*) d) $\int_{|z|=1} \cot z \, dz$

e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin \pi z}{1+z+z^2+z^3}\,dz$

f) $\displaystyle\int_{|z|=3/2} \frac{z^3}{z+1}\, e^{\frac{1}{z}}\,dz$

g) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}}$

113. Beräkna integralerna

(*) a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^4}\,dx$

114. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx$ och $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4}\,dx$, a reell

e) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,dx$

109. Antag att $f(z)$ är en entydig konform avbildning av enhetscirkeln $|z| < 1$ på sig själv så att medelpunkten ej flyttas (dvs så att $f(0) = 0$).
Visa att $f(z) \equiv kz$ där k är en konstant med $|k| = 1$.

115. $\displaystyle\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^z}{1-z^2}\,dz$, integrationsvägen rätlinjig.

116. Bestäm det positiva heltal n, som ger största absoluta värdet åt $\displaystyle\int_C \left(\frac{9+2z}{10}\right)^n \frac{dz}{z^3}$, när C är enhetscirkeln genomlöpt i positiv led.

120. Beräkna $\displaystyle\int_c \frac{dz}{\sin^2 z}$ då c är ellipsen $|z| + |z-3| = 4$, orienterad i positiv led.

122. I motsats till vad Linus ibland föreställer sig är

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\cos z}{1+z^2}\,dz \neq 0$$

(C_R = halvcirkelbåge i övre halvplanet med centrum i $z = 0$ och radie $= R$).

Vilket är det rätta gränsvärdet?

131. Beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta$

142. Hur många nollställen har $z^3 + 5z + 1$ för $\operatorname{Re} z > 1$?

(*) 144. Hur många rötter har ekvationen

$$z^5 + 10z - 1 = 0 \text{ för } 1 < |z| < 2\ ?$$

154. Undersök vilka hela funktioner $f(z)$ som statisfierar olikheten

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^2}{1+|z|} \quad \text{för alla } z.$$

En funktion kallas hel om den är definierad och analytisk för alla komplexa tal.

159. Beräkna de generaliserade integralerna

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx \quad \text{och} \quad \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$$

162. Beräkna $\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z}$ då $0 < c < 1$ och integrationsvägen är en rät linje.

168. Visa att om $f(z)$ är analytisk för $\operatorname{Re} z \geq 0$ och

(1) $f(\frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})^n$ för $n = 1,2,3 \ldots$ så gäller

(2) $f(n) = (1 + n)^{1/n}$ för $n = 1,2,3, \ldots$.

Visa att (2) inte nödvändigtvis medför (1).

169. För $0 < a < 1$ kan man beräkna $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n + a)^2}$ genom att studera

$\displaystyle\int_{C_R} \frac{\pi \cot(\pi z)dz}{(z + a)^2}$ när $R \to \infty$. Med C_R betecknas en kvadrat med medelpunkt i origo och sidorna parallella med reella resp imaginära axlarna och kantlängden $2R + 1$, $R = 1,2,3, \ldots$. Ange seriens summa.

182. Bestäm konvergensradien R för var och en av följande serier:

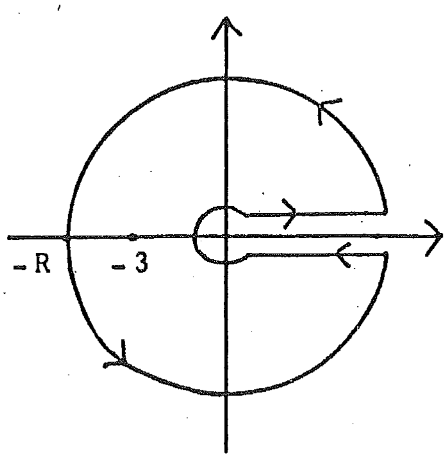
a) $\displaystyle\sum_2^\infty \frac{(-1)^n z^n}{n \ln n}$ b) $\displaystyle\sum_2 \frac{z^{2n}}{n - \sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_0^\infty z^{n!}$ d) $\displaystyle\sum^\infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

e) $\displaystyle\sum_1^\infty n! \, z$ f) $\displaystyle\sum_0^\infty r_n z^n$

där $\{r_n\}$ är de rationella talen mellan 0 och 1 i godtyckligt ordnad följd.

191.



Antag att man vill beräkna

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x + 3)^2} dx \, .$$

Det ligger nära till hands att integrera $\displaystyle\int \frac{\ln z}{(z + 3)^2} dz$ längs följande kontur: (se bilden).

Vad får man ut av det?

192. Antag att man får den ljusa idén att i stället bilda integralen $\int \frac{(\ln z)^2}{(z+3)^2}\,dz$. Lyckas man då bättre med integralen i föregående uppgift?

193. Var och en av följande funktioner har en singularitet i $z = 0$. Vad för slags singularitet?

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ c) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)}$

d) $f(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^2}$ e) $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$ f) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

196. Bestäm antalet rötter till ekvationen $z^4 - z^3 + 13z^2 - z + 3 = 0$ i varje kvadrant av det komplexa planet.

Int