

Institutionen för matematik, KTH  
Avd. matematik  
TK januari 2007. Senast ändrad 30/5 2008.

## SF1693 Diff-int II, del 2, flervariabel för F1

*Läsanvisningar till A. Persson, L.-C. Böiers, Analys i flera variabler, 3:e uppl.*

### Kap. 1. Funktioner av flera variabler.

**1.2.** Här behandlas det  $n$ -dimensionella reella vektorrummet  $\mathbb{R}^n$ . Materialet har redan genomgått kursen i linjär algebra. Vi kommer nästan alltid att behandla exempel i två eller tre dimensioner, men det är ofta praktiskt att kunna formulera sig mer allmänt, och kortfattat, i  $\mathbb{R}^n$ .

**1.3.** Viktiga nya begrepp är *det inre* av en mängd, *randen* till en mängd; *öppna*, *slutna*, *begränsade* och *kompakta* mängder (Definition 1, 2, 3 och 4). Se exempel 2-4, 6-9. I samband med max- och minproblem, samt integration i flera variabler måste man kunna skissera områden och bestämma deras ränder korrekt.

**1.4.** *Grafen* till en funktion  $f$  av två variabler är en yta i tre dimensioner,  $z = f(x, y)$ , där  $(x, y)$  genomlöper definitionsmängden till  $f$ . Det är viktigt att veta hur graferna till "vanliga funktioner", främst *andragradsytor*, sid 29-31, ser ut. Ett alternativt framställningssätt är att rita funktionens *nivåkurvor*, ungefär som höjdkurvorna i en karta. Funktioner av tre variabler kan studeras genom analys av deras nivåytor.

Med hjälp av ett matematikprogram, t ex Maple, kan man låta programmet rita upp grafer eller nivåkurvor. Rekommenderas!

Läs ex. 12, 13, 14, 20, 22.

I avsnittet behandlas kort, igen, parametriserade kurvor. Det handlar om vektorvärda funktion av en variabel. Exempel på vektorvärda funktioner av en vektorvariabel är koordinatbyten, t ex övergång till polära koordinater (Ex. 21), samt ytor. Se ex. 16, 17, 18.

I exempel 19 och 23 förekommer ett viktigt koordinatsystem, *sfäriska koordinater*. Det är en tredimensionell motsvarighet till polära koordinater, användbart t ex i samband med integration i tre variabler.

**1.5.** Gränsvärden definieras (Def. 5) i princip som för funktioner av en variabel. De vanliga räknelagarna gäller.

Observera att  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  betyder att  $|(x, y) - (a, b)| \rightarrow 0$ . Den stora skillnaden är att man i en dimension bara kan låta  $x \rightarrow a$  från två håll, uppifrån och nedifrån. I två dimensioner finns det massor av sätt att låta  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ . Funktionerna i Ex. 24-26 är inte från början definierade i origo. Man kan då undersöka om funktionen i fråga har olika gränsvärden då  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  längs olika kurvor. Detta är fallet i Ex. 25-26. Det innebär att funktionerna saknar gränsvärde i origo. Dessa exempel visar att funktioners beteende kan vara mycket mer komplicerat i dimension 2, 3, ....

**1.6.** Kontinuitetsdefinitionen ser ut som i en dimension. Satserna om existens av största och minsta värden samt om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall, har motsvarigheter i flera dimensioner: Sats 4 och Sats 6. Den förstnämnda satsen är viktig i optimeringsproblem. Då vi lite längre fram skall införa multipelintegraler behövs Sats 5, om likformig kontinuitet (precis som tidigare i en dimension).

### 2.1 Partiella derivator.

Definition av och beteckningar för partiella derivator. Ex. 1-3, 5.

Den geometriska betydelsen av de partiella derivatorna är viktig och framgår av figuren på sid. 46. Ett svårare fenomen beskrivs av exemplet kring figuren på sid 51. Funktionen i exemplet uppfyller  $f'_x = 0$  överallt i den sammanhängande definitionsmängden, men  $f$  är *inte* en funktion bara av  $y$ . Tål att tänka på!

I Ex. 6 noterar man att funktionen  $f$ , som inte är kontinuerlig i origo (enl. ex 25 i kap. 1.5), ändå har partiella derivator i origo. Det visar att existens av partiella derivator inte är rätt villkor i flera variabler. Det ersätts därför av ”differentierbarhet”, nedan.

**2.2. Differentierbarhet.** En funktion  $f(x, y)$  är *differentierbar* i  $(a, b)$  om det finns tal  $A$  och  $B$  så att

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - (f(a,b) + Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Om vi sätter  $x = a + h, y = b + k$ , så blir  $z = f(a, b) + Ah + Bk = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$  ett plan i tre dimensioner. Detta plan ligger särskilt nära grafen till  $f$ , dvs ytan  $z = f(x, y)$  vid punkten  $(a, b, f(a, b))$ .

En differentierbar funktion måste vara kontinuerlig. Av definitionen följer också att  $f$  har partiella derivator i  $(a, b)$  och  $A = f'_x(a, b)$  samt  $B = f'_y(a, b)$ . Det nyss nämnda planet

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

kallas för *tangentplanet* till ytan, vid punkten  $(a, b, f(a, b))$ . Läs Ex. 7.

Normalen till tangentplanet i punkten är  $\mathbf{N} = (-f'_x(a, b), -f'_y(a, b), 1)$ . Den linje som går genom punkten och har  $\mathbf{N}$  som riktningsvektor kallas *normallinjen*.

Klassen  $C^1$  definieras på sid 56. Den består av funktioner som har kontinuerliga derivator av ordning  $\leq 1$ . Varje sådan funktion är differentierbar (Sats 3). Det innebär att de elementära funktionerna är differentierbara. Se Ex 8.

Avsnittet om felanalys på sid. 58-60, handlar om *linjär approximation*, approximation av en funktions värde med motsvarande värde på tangentplanet (i en lämplig punkt).

**2.3. Kedjeregeln.** Kedjeregeln handlar om att derivera sammansatta funktioner. Det nya är att vi har flera variabler och partiella derivator. Rent allmänt är kedjeregeln en konsekvens av differentierbarhet, precis som i envariabel.

Några typiska fall:  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Då blir  $z = z(t)$ , en funktion av  $t$ . Dess derivata beräknas enligt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Om i stället  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$ , så blir  $z = z(s, t)$ , och dess derivator ges av

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ekvationerna kan skrivas kortare med hjälp av matrismultiplikation. Se den allmänna kedjeregeln i avsnitt 3.2, sid 138.

Kedjeregeln dyker ofta upp i samband med koordinatbyten och partiella differentialekvationer. Det framgår tydligt av exemplen i avsnittet. Läs ex. 10-17. Termen transformering innebär att man "översätter" ett differentialuttryck eller en differentialekvation till nya variabler. Det blir mer intressant då vi kan handskas med andraderivator i kedjeregeln.

**2.4. Gradient och riktningsderivata** För en differentierbar funktion samlar man derivatorna i en vektor, funktionens *gradient*.

$$\begin{aligned} \nabla f &= \text{grad } f = (f'_x, f'_y) \quad \text{i två dimensioner,} \\ \nabla f &= \text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z) \quad \text{i tre dimensioner} \end{aligned}$$

Låt  $\mathbf{v}$  vara en enhetsvektor (av längd 1) och  $\mathbf{a}$  en punkt i  $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{R}^3$  (eller  $\mathbb{R}^n$ ). Vi kan då derivera en funktion  $f$ , definierad i en omgivning till  $\mathbf{a}$ , genom

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}.$$

Per definition är detta *derivatan av  $f$  i riktningen  $\mathbf{v}$  i punkten  $\mathbf{a}$* .

Genom att i  $\mathbb{R}^2$  ta  $\mathbf{v} = (1, 0)$  ( $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  i  $\mathbb{R}^3$ ) får vi tillbaka den partiella derivatan  $f'_x(\mathbf{a})$ . På samma sätt ger vektorn  $(0, 1)$  derivatan  $f'_y(\mathbf{a})$  osv.

För *differentierbara funktioner* kan riktningsderivatan beräknas enligt formeln

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Resultatet (Sats 6 sid 78) är en direkt konsekvens av kedjeregeln.

*Tolkning av gradienten:* Genom att variera enhetsvektorn  $\mathbf{v}$  finner man

$$-|\nabla f(\mathbf{a})| \leq f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) \leq |\nabla f(\mathbf{a})|,$$

med likhet till höger (vänster) precis då  $\mathbf{v}$  och  $\nabla f(\mathbf{a})$  har samma (motsatt) riktning. Det innebär att gradienten  $\nabla f(\mathbf{a})$  är den riktning i vilken  $f$  växer snabbast vid punkten  $\mathbf{a}$ . (Sats 7, sid 79.)

*Gradientens geometriska betydelse:* (i) Anta att  $F$  är en differentierbar funktion av tre variabler, definierad i en omgivning till punkten  $(x_0, y_0, z_0)$ , på nivåytan  $F(x, y, z) = C$ . Då gäller att  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  är normalvektor till ytans tangentplan i punkten. Ekvationen för tangentplanet kan därför skrivas

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

dvs

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

(ii) För en differentierbar funktion  $f$  av två variabler gäller ett motsvarande påstående: Anta att punkten  $(a, b)$  ligger på en nivåkurva till  $f$ :  $f(a, b) = c$ . Då är  $\nabla f(a, b)$  normalvektor till kurvans tangentlinje i punkten  $(a, b)$ . Se figuren mitt på sid. 81.

(iii) Det är viktigt att man inte blandar ihop dessa två fall, (i) och (ii). Vi har ju tidigare härlett ekvationen

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

för tangentplanet till  $f$ 's graf, dvs ytan  $z = f(x, y)$ , genom punkten  $(a, b, f(a, b))$ . Vi får samma resultat genom att införa funktionen  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$  och använda (i).

Tänk på att gradienten till en funktion i två dimensioner är en tvådimensionell vektor. Den kan därför inte vara normalvektor till ett plan.

**2.5 Partiella derivator av högre ordning.** Det viktiga resultatet här, Sats 9, sid. 87, är att om en funktion har kontinuerliga derivator av ordning  $\leq 2$  ( $f$  är  $C^2$ ) så är de blandade andraderivatorna lika:  $f''_{xy} = f''_{yx}$  etc. För blandade trejederivator gäller t ex  $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$  om  $f$  är  $C^3$  osv.

Exemplet med *vågekvationen* (sid 89-91) är viktigt i tillämpningar. Där ser man också tydligt hur man handskas med kedjeregeln för andra derivator. Detta exempel är lite enklare genom att de inre derivatorna (från  $u = x + ct$ ,  $v = x - ct$ ) är konstanta. I exempel 28, sid 92-93, beräknas andraderivator i ett fall där de inre derivatorna inte är konstanta.

## 2.6 Lokala extrempunkter, Taylors formel och andraderivatetestet.

*Taylors formel* av ordning två i två variabler (härleds från envariabelsfallet genom ett knep) är (Sats 10, sid 94)

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k \\ &+ \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2) \\ &+ R_3 = P_2(h, k) + R_3, \end{aligned}$$

där resttermen  $R_3$  är av ordning  $O((h^2 + k^2)^{3/2})$  om  $f$  är  $C^3$ . Faktorn 2 framför  $f''_{xy}$  beror på att det finns två blandade andra derivator,  $f''_{xy}$  och  $f''_{yx}$ .

Formeln för ordning tre blir

$$f(a+h, b+k) = P_2(h, k) + \frac{1}{3!} \left( f'''_{xxx}(a, b)h^3 + 3f'''_{xxy}(a, b)h^2k + 3f'''_{xyy}(a, b)hk^2 + f'''_{yyy}(a, b)k^3 \right) + R_4,$$

där  $R_4 = O((h^2 + k^2)^2)$  om  $f$  är  $C^4$ . Koefficienterna för tredjegradstermerna är åter av kombinatoriskt ursprung och åter desamma som i Pascals triangel, nämligen 1 3 3 1. Mönstret fortsätter i Taylors formel för högre ordning.

*Lokala extrempunkter.* Definition 7, s. 99. Sats 11, s. 99, visar, att en differentierbar funktion  $f$  måste uppfylla  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  i en lokal extrempunkt. (För att se detta använder man bara envariabelresultatet i varje variabel.) En sådan punkt kallas *kritisk* eller *stationär*.

Anta nu att  $f(x, y)$  är  $C^3$  och  $(a, b)$  är en kritisk punkt för  $f$ :  $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ . Låt  $A = f''_{xx}(a, b)$ ,  $B = f''_{xy}(a, b)$  och  $C = f''_{yy}(a, b)$ . Taylors formel ger

$$f(a+h, b+k) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + R_3 = \frac{1}{2}Q(h, k) + R_3,$$

eftersom förstaderivatorna i  $(a, b)$  försvinner. Det är klart att om inte den kvadratiske formen  $Q(h, k)$  är 0 för alla  $(h, k)$ , så bestäms kritiska punktens karaktär av  $Q$ . Tex handlar det om ett lokalt maximum då  $Q$  är negativt definit:  $Q(h, k) < 0$  för  $(h, k) \neq (0, 0)$ . Det fullständiga resultatet finns i Sats 12, sid 111. Detta resultat ser i princip likadant ut i högre dimension.

I dimension två kan man formulera ett *andraderivatetest* genom att studera tecknet på  $A$  och den s.k. diskriminanten,  $AC - B^2$ .

**SATS.** *Andraderivatetestet i två dimensioner.* Anta att  $f(x, y)$  har kontinuerliga derivator av ordning  $\leq 2$  och att den kritiska punkten  $(a, b)$  (dvs  $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ ) ligger i det inre av definitionsmängden till  $f$ . Låt  $A = f''_{xx}(a, b)$ ,  $B = f''_{xy}(a, b)$ ,  $C = f''_{yy}(a, b)$  och sätt  $\Delta = AC - B^2$ . Då gäller:

- Om  $\Delta > 0$  och  $A > 0$  har  $f$  ett lokalt minimum i  $(a, b)$ .
- Om  $\Delta > 0$  och  $A < 0$  har  $f$  ett lokalt maximum i  $(a, b)$ .
- Om  $\Delta < 0$  har  $f$  en sadelpunkt i  $(a, b)$ .
- Om  $\Delta = 0$  kan ingen slutsats dras.

**3.1 Kurvor och ytor.** En *parametriserad kurva* i  $n$  dimensioner är en kontinuerlig funktion  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  ( $n = 2$ ),  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ( $n = 3$ ) (och allmänt,  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ) med värden i  $\mathbf{R}^n$ . Parametern ("tiden")  $t$  genomlöper ett intervall, från  $t = a$  till  $t = b$ . Kurvan har alltså en given *genomloppsriktning*.

I tillämpningar är koordinatfunktionerna  $x(t), y(t), \dots$  två gånger deriverbara. *Positionsvektorn*  $\mathbf{r}(t)$  anger positionen vid tid  $t$ . Derivatans  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) =$

$(x'(t), y'(t), z'(t))$  i tre dimensioner, är *hastighetsvektorn* och andraderivatan  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{v}'(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$  är *accelerationsvektorn*. Skälären  $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$  är *farten*. I envariabelskursen såg vi att kurvans längd från startpunkten, till positionen vid tid  $t$  är  $s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau$ . Hela kurvlängden är alltså  $s(b)$ . Vi har  $ds/dt = s'(t) = v(t)$  och tvärtom (vi antar då att  $\mathbf{v}(t)$  aldrig  $= \mathbf{0}$ ),  $dt/ds = 1/v(t(s))$ .

En *parametriserad yta* i två dimensioner är en funktion

$\mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  där parametrarna  $s$  och  $t$  genomlöper ett område i  $st$ -planet. Vi har tidigare sett ytor på formen  $z = f(x, y)$  eller  $F(x, y, z) = 0$ .

*Normalvektorn* till ytans tangentplan i en punkt  $\mathbf{r}(s_0, t_0)$  är kryssprodukten  $\mathbf{r}'_s(s_0, t_0) \times \mathbf{r}'_t(s_0, t_0)$ . Figuren på sidan 127 visar hur kurvorna där  $s$  resp.  $t$  är konstant ger en "karta" på ytan.

**3.2 Funktionalmatriser.** I detta avsnitt behandlar man derivatorna för vektorvärda funktioner av flera variabler. Man sammanställer dessa i en matris, funktionalmatrisen. Det är gjort så att vi har gradienterna i varje rad. Se matrisen mitt på sid 129.

"Linjarisering" är helt enkel differentierbarhet för vektorvärda funktioner, formlerna högst upp på sid. 132.

**3.3 Funktionaldeterminanter.** Då man byter variabler i  $\mathbf{R}^n$  uttrycks detta genom en funktionalmatris av storlek  $n \times n$ . Dess determinant är en funktionaldeterminant (Jacobian eller Jacobideterminant). De dyker senare upp i samband med variabelbyte i multipelintegraler. Exempel 3, polära och rymdpolära koordinater är viktiga variabelbyten i rtvå resp. tre dimensioner. Man skall känna till detta resultat. Resultatet i Sats 1, sid. 141, blir också användbart vid multipelintegration längre fram.

Inversa funktionssatsen; Sats 2, ger kriterium för att lokalt kunna invertera en funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . I en variabel,  $n = 1$  är villkoret helt enkelt att  $f'(a) \neq 0$ . Motsvarande resultat gäller i flera dimensioner och formuleras så att  $\mathbf{f}$ :s funktionalmatris i punkten  $\mathbf{a}$  skall vara inverterbar,  $\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \neq 0$ .

**3.4 Implicita funktioner.** Man vill från ekvationen  $F(x, y) = C$  (nivåkurva) lösa ut en variabel som en funktion av den andra. Villkor för detta ges i Sats 3, sid. 148. I ex. 16 visas hur satsen används.

I exempel 18 behandlas ett liknande problem men för en nivåyta. Då kan man, under motsvarande villkor lokalt lösa ut en variabel som en funktion av de övriga två.

I exempel 21 har man två nivåytor. Det ger två ekvationer och tre variabler. Man kan då under liknande villkor lösa ut två variabler som funktion av den tredje. Tänk på att skärningen mellan två ytor i typiska fall utgör en kurva, ett enparametriskt objekt.

Sist i avsnittet, på sid. 156 finns en allmän sats som täcker ovanstående exempel.

**4.1 Optimering på kompakta områden.** Vi vet sedan tidigare att en

kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar största och minsta värde på mängden. Precis som i en variabel (ändpunkterna till ett intervall har ersatts av randen) finner vi att detta sker i

- (i) en inre kritisk (stationär) punkt, eller
- (ii) en inre singulär punkt (funktionen inte differentierbar), eller
- (iii) en randpunkt.

Man får då en lista på kandidater, och jämför dessa värden.

Hur man går tillväga framgår av Ex. 1-3. En allmän kommentar är att i två variabler leder ofta randundersökningen till ett envariabelsproblem.

**4.2 Optimering på icke-kompakta områden.** Läs ex. 4-5. Exempel 39, sid 110, visar på en fundamental skillnad mellan en och två dimensioner. I exemplet har funktionen bara en kritisk punkt, ett lokalt minimum. Detta är *inte* funktionens minsta värde.

**4.3 Optimering med bivillkor.** Det viktiga resultatet är Lagranges metod, formulerad i Sats 1 för funktioner av två variabler. Det betyder att (3'') måste gälla.

I Ex. 8 studeras problemet med bivillkor "direkt". Ex. 9 behandlas med Lagranges metod. I ex. 10 används Lagrange i tre dimensioner. Villkoret är detsamma  $\nabla f$  och  $\nabla g$  skall vara parallella i en ev. extrempunkt.

Man kan också ha fler bivillkor. Det behandlas i Ex. 11.

**5.7 Krökning och torsion.** Givet en parametriserad kurva  $\mathbf{r}(t)$  i tre dimensioner. (En plan kurva fås genom att låta  $z = 0$ .) Vi använder båglängden som parameter:  $s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \int_a^t v(\tau) d\tau$ . Man visar att då gäller att hastigheten  $\hat{T} = d\mathbf{r}/ds$  är en enhetsvektor, dvs har längd 1. Vidare gäller att  $d\hat{T}/ds = d^2\mathbf{r}/ds^2$  (accelerationen vid båglängdsparametrisering) är ortogonal mot  $\hat{T}$ . Vi antar att  $d\hat{T}/ds$  inte är nollvektorn. Då kan vi skriva  $d\hat{T}/ds = \kappa(s)\hat{N}$ , där  $(\hat{T}, \hat{N})$  är ett positivt orienterat ON-system längs kurvan. Funktionen  $\kappa(s)$  är kurvans *krökning* vid punkten  $\mathbf{r}(s)$ . Fallet  $\kappa = 0$  svarar mot en linje.

Vi kan komplettera vårt ON-system med *binormalen*  $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$ . Då gäller *Frenets formler*, mitt på sid. 214.

I *allmän parametrisering*,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , gäller formeln

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{v^3(t)}$$

för kurvans krökning i punkten  $\mathbf{r}(t)$ . Läs Ex. 12-14.

## 6. Dubbelintegraler.

**6.1-3.** Riemannintegralen införs ungefär som i en dimension. Man integrerar först trappfunktioner osv. Motivet för dubbelintegralen är dock volymsberäkningar. I Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{i,j}) \Delta x_i \Delta y_j$$

är  $f(P_{i,j})$  höjd och  $\Delta x_i \Delta y_j$  bottenarea för rätblocket vars bas är rektangeln  $R_{i,j} : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}$ . Vidare är  $P_{i,j}$  en punkt i  $R_{i,j}$ .

I alla händelser härleder man integrationsregler för Riemannintegrerbara funktioner, (13)-(16), på sid 241-242, och visar att kontinuerliga funktioner är integrerbara. Liksom i en dimension kräver detta resultat begreppet likformig kontinuitet (Sats 5, sid 41).

För att kunna beräkna dubbelintegraler används upprepad integration, man integrerar en variabel i taget, och använder därvid teknik från envariabelkursen. I Sats 2, sid 235, är detta resultat formulerat för en rektangel. Denna situation behandlas i Ex. 1-3.

I Sats 4, sid 246, ges ett resultat då gränserna för  $y$  är funktioner av  $x$ . Ex. 5-7 behandlar denna och likartade situationer. Det är viktigt att man kan finna korrekt gränser för att beräkna dubbelintegraler.

På sid. 256-258, Ex. 10-11, visas "för hand" hur man byter variabler till polära koordinater ( $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ ) i dubbelintegraler. Det uttrycks väl i figurerna på sid 257, samt högst upp på sid 258. Formeln  $dxdy = r dr d\phi$  är ett måste.

**6.4 Variabelbyte i dubbelintegraler.** Här gäller att området  $D$  i  $xy$ -planet erhålles som  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ , där  $(u, v) \in E$  och avbildningen är  $C^1$  och inverterbar med dito invers. Se figurerna på sid. 260-261. Låt  $d(x, y)/d(u, v)$  beteckna Jacobi- eller funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = x'_u y'_v - x'_v y'_u.$$

Då gäller

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv,$$

eller  $dxdy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv$ . Formeln används i Ex. 16. Observera de elliptisk-polära koordinaterna i Ex. 15. En liten variation visar att området  $D : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$  (där  $a > 0, b > 0$ ), dvs området innanför ellipsen  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , kan parametreras som  $x = ar \cos \phi, y = br \sin \phi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Speciellt finner man formeln  $A(D) = ab\pi$  för arean av  $D$ .

I Ex. 17 används polära koordinater tillsammans med en limesövergång för att beräkna den generaliserade integralen (27):  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  som förekommer i samband med normalfördelningen i matematisk statistik (senare).

**6.5** Läs själva.

**6.6** Läs ex 20-27.

## 7. Multipelintegraler.

**7.1** Här beräknas trippelintegraler. Detta sker återigen med hjälp av upprepad integration. Skillnaden är att vi nu har ytterligare en variabel att integrera. Variabelsubstitution sker ungefär som i två variabler, med uppenbara



ändringar:

$$dxdydz = \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| dudv dw.$$

Läs Ex. 1-3, 5-6.

**7.2** Läs själva.

## 8. Tillämpningar av integraler.

**8.1** Volymsberäkningar. Läs Ex. 1-4.

**8.2** Area av buktig yta. Givet en yta  $\mathcal{S} : z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , där  $z$  är en differentierbar funktion av  $x$  och  $y$ . Man finner (Ex. 8) att arean av ytan  $\mathcal{S}$  ges av

$$A(\mathcal{S}) = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_D |\mathbf{N}| dx dy = \iint_{\mathcal{S}} dS.$$

$dS$  är ytans areaelement och  $\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$  är normalen till tangentplanet. Formeln skall jämföras med uttrycket

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_C ds$$

för längden av kurvan  $C : y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .

För en allmän parametriserad yta  $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ ,  $(s, t) \in E$ , gäller att areaelementet är

$$dS = |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt = |\mathbf{N}| ds dt$$

**Kurvintegraler (9.1/10.1).** Om vi har en parametriserad kurva  $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $t : a \rightarrow b$ , i två eller tre (eller  $n$ ) dimensioner, så ges kurvlängden av  $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ . Vi kan integrera en funktion  $f$  längs kurvan:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Tänk på  $C$  som en tråd och  $f$  som dess densitet. Då är  $\int_C f ds$  trådens massa. En annan tolkning är att  $f$  representerar höjden av en mur/ett staket längs tomtgränsen  $C$ . Då är integralen murens/staketets area.

Låt  $\mathbf{F}$  vara ett vektorfält: i två dimensioner kan vi skriva  $\mathbf{F} = (P, Q)$ , där  $P$  och  $Q$  är (kontinuerliga) funktioner av  $(x, y)$ . I tre dimensioner gäller  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  och  $P$ ,  $Q$  och  $R$  är (kontinuerliga) funktioner av  $(x, y, z)$ . (Allmänt är  $\mathbf{F}$  en (kontinuerlig) funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .) Låt  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$  beteckna kurvans enhetstangent (tangent av längd 1). Med  $f = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}$  i integralen ovan får vi kurvintegralen (ekv. (4), sid 333)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds.$$

*Tolkning:* Vi kan tänka på  $\mathbf{F}$  som ett kraftfält. Då är  $\mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}}$  den del av kraften som går i kurvans, dvs tangentens, riktning. Eftersom kraft gånger sträcka är arbete ser vi att integralen representerar *det arbete som krävs för att föra en partikel längs  $C$  i kraftfältet  $\mathbf{F}$ .*

Det gäller att

$$\widehat{\mathbf{T}} ds = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \mathbf{r}'(t) dt,$$

varför integralen kan beräknas som

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

och oftast skrivs

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

Se Def. 1, sid 328, samt början av avsnitt 10.1, sid 359. Se också ex 1-5, i kap. 9, samt ex 1 i kap 10.

I två dimensioner finns också en variant där man integrerar i normalriktningen:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = \int_C -Q dx + P dy.$$

**Konservativa fält (9.4, 10.5).**  $\mathbf{F}$  är *konservativt* om det finns en funktion  $\phi$ , fältets *potentialfunktion*, sådan att  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ . I så fall gäller (Sats 2, s 345)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\text{ändpunkt}) - \phi(\text{startpunkt}) = \phi(B) - \phi(A).$$

Integralen är alltså *oberoende av vägen från  $A$  till  $B$* . Potentialfunktionen  $\phi$  fungerar ungefär som en primitiv funktion i en variabel. Den är bara bestämd upp till en additiv konstant. Läs ex 11-12 i 9.4.

*Nödvändiga villkor för konservativitet:* Anta att vektorfältet är  $C^2$ . I två dimensioner måste man ha  $Q'_x = P'_y$ . I tre dimensioner tillkommer ekvationerna  $R'_y = Q'_z$  och  $P'_z = R'_x$ . Man kan uttrycka detta som att funktionalmatrisen  $D\mathbf{F}$  är symmetrisk.

I ex 14, kap. 9.4, ser man att villkoret inte är tillräckligt. Det finns  $P$  och  $Q$  som uppfyller  $P'_x = Q'_y$ , men inte är konservativt. En del av detta kan förklaras med att fältet har en singularitet (i origo) och att man går runt den. Däremot, om villkoret är uppfyllt och fältet är  $C^1$  i hela planet så finns en potentialfunktion. Se mer om detta på sid 351 och framåt. Se också Sats 3, sid 349.

I ex 16 förekommer ett vanligt och viktigt knep: byt kurva. Man konstaterar att fältet är konservativt, bestämmer inte potentialfunktionen, utan integrerar över en "bättre" kurva.

**Nabla-kalkyl (10.4).** Låt  $f$  vara en funktion och  $\mathbf{F} = (P, Q, R) = (F_1, F_2, F_3)$  ett vektorfält i tre dimensioner. Vi har tidigare infört *gradienten* till  $f$  genom  $\text{grad } f = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ . Vi behöver också uttrycken *divergens och rotation*:

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3, \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) \\ &= (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_1, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1),\end{aligned}$$

Här betyder  $\partial_1$  att vi deriverar med avseende på den första variabeln,  $x$ , osv.  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  precis då funktionsmatrisen  $D\mathbf{F}$  är symmetrisk.

### Integralformler.

**Greens formel (9.2, 9.3).**  $D$  är ett område i planet med orienterad rand  $C$ , som i figurerna på s 335. Då gäller

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

om  $P$  och  $Q$  är  $C^1$ . Av beviset (s 335-336) framgår att allt hänger på integral-kalkylens fundamentalsats.

I Ex. 6 ges en direkt användning av Greens formel. I Ex 7 används den för att slippa en komplicerad kurvintegral: man "sluter till" området så att Greens formel kan användas.

**Areaformeln:** Vektorfälten  $(-y, 0)$ ,  $(0, x)$  och  $\frac{1}{2}(-y, x)$  uppfyller alla formeln  $Q'_x - P'_y = 1$ . Härav följer

$$A(D) = \int_C -y dx = \int_C x dy = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy,$$

där  $A(D) = \iint_D 1 dx dy$  betecknar arean av  $D$ . I ex 10 tillämpas detta på ellipsskivan  $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$  ( $a, b > 0$ ) som har area  $\pi ab$ .

**Divergenssatsen i två dimensioner.** Om  $\hat{\mathbf{N}}$  betecknar den yttre enhetsnormalen till  $D$ , så att  $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{T}_2, -\hat{T}_1)$ , där  $\hat{\mathbf{T}} = (\hat{T}_1, \hat{T}_2)$  är enhetstangenten, gäller att  $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = (-F_2, F_1) \cdot \hat{\mathbf{T}}$ , vilket leder till den tvådimensionella *divergenssatsen*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy.$$

Detta resultat är ekvivalent med Greens formel. Integralen är en *flödesintegral*.  $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$  är ju den del av  $\mathbf{F}$  som går i yttre normalriktningen. Flödesintegralen mäter det totala flödet (vid en viss tidpunkt) ut från  $D$ .

### Flödesintegraler i tre dimensioner.

Låt nu  $S$  vara en grafyta, dvs ges av  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ . Då är ytelementet

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = |\mathbf{N}| dx dy,$$

där  $\mathbf{N}$  är normalen  $\pm(-z'_x, -z'_y, 1)$  till ytan. Vi kan integrera en funktion över  $\mathcal{S}$ , genom definitionen

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Låt nu  $\mathbf{F}$  vara ett vektorfält och  $\widehat{\mathbf{N}}$  ytans enhetsnormal. Man måste ange vilken normalriktning som gäller. Anta normalen är uppåtpekande. Flödet av  $\mathbf{F}$  genom ytan är då

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = \iint_D \mathbf{F}(x, y, z(x, y)) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) dx dy$$

Här har vi använt att

$$\widehat{\mathbf{N}} dS = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} |\mathbf{N}| dx dy = \mathbf{N} dx dy.$$

Jämför uträkningen av  $\mathbf{N} \cdot \widehat{\mathbf{T}}$  tidigare.

**Divergenssatsen i tre dimensioner (10.2).** Satsen kallas ofta Gauss formel eller Gauss sats. Vi har en solid kropp  $K$  (tänk på ett klot) med rand  $\mathcal{S}$  (tänk på en sfär) och yttre enhetsnormal  $\widehat{\mathbf{N}}$ . Om vektorfältet  $\mathbf{F}$  är  $C^1$  gäller

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz.$$

**Stokes sats (10.3).** Här har vi en yta  $\mathcal{S}$  (i tre dimensioner) med orienterad rand  $C$  (en kurva) och yttre enhetsnormal  $\widehat{\mathbf{N}}$ . (Se figurerna sid. 379-381.)  $\mathbf{F}$  är ett  $C^1$  vektorfält. Då gäller (Sats 2, s. 380)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} dS.$$

Ex. 13 visar hur Stokes sats används.

Stokes sats är en direkt motsvarighet till Greens formel. Om ytan (och därmed dess rand) ligger i planet ( $z = 0$ ) så är enhetsnormalen  $(0, 0, 1)$  och i högerledet beräknas dubbelintegralen av  $Q'_x - P'_y$ .