

Uppgifter inför KS 6 den 28 jan 2010. CL09.

1. Beräkna följande generaliserade integraler om de existerar:

a) $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$ b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ c) $\int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}$

2. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{2x^4+x^3+1} dx$ b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ c) $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx$

3. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna $y = \frac{1}{1+x^2}$ och $y = \frac{x^2}{2}$.

4. Bestäm arean inom kurvan $y^2 = 4x^2 - 4x^4$.

5. Beräkna längderna av följande kurvor:

a) $y^2 = \frac{x^3}{9}$, $0 \leq x \leq 12$. b) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2} \end{cases}$, $0 \leq t \leq 4$ c) $r = 1 - \cos v$, $0 \leq v \leq 2\pi$

6. Beräkna den volym som uppkommer vid rotation runt x-axeln av det område i xy-planet som bestäms av olikheterna $0 \leq x \leq 2$ och $x^2 \leq y \leq 2x$.

7. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då ytan $y^2 \leq (2-x)(x-1)$ roterar omkring x-axeln.

8. Bestäm de allmänna lösningarna till följande differentialekvationer:

a) $y'' - 2y' - 3y = 0$ b) $y'' - 2y' = 0$ c) $y'' + y = 0$
d) $y'' + 2y' + 5y = 0$ e) $y'' - 2y' + 6y = 0$ f) $y'' + 6y' + 9y = 0$
g) $y''' - y' = 0$ h) $y''' - 12y' - 16y = 0$

9 a) Funktionen $y(x)$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - 4y' + 20y = 0$. sådan att $y(0) = 1$. Bestäm $y(\frac{\pi}{2})$.

10. a) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + x + 1$ b) $y'' + 2y' + 10y = 2x^2 + 3x$
 c) $y'' + 3y' = 2x^2 + x + 1$ d) $2y'' - 2y' + 3y = e^x$
 e) $y'' + 2y' + y = xe^x$ f) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$
 g) $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ h) $y'' + y = 4\cos x$

Svar: 1 a) $\frac{9\pi}{4}$ b) π c) Existerar ej .

2 a) konvergent b) konvergent c) konvergent

3 a) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ 4. $\frac{8}{3}$

5 a) $\frac{112}{3}$ b) 20 c) 8 6. $\frac{64}{15}\pi$ 7. $\frac{\pi}{6}$

8. a) $y = Ae^{3x} + Be^{-x}$ b) $y = Ae^{2x} + B$ c) $y = A\cos x + B\sin x$

d) $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ e) $y = e^x(A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x)$

f) $y = (Ax + B)e^{-3x}$ g) $y = A + Be^x + Ce^{-x}$ h) $y = Ae^{4x} + (Bx + C)e^{-2x}$

9. e^π

10. a) $y = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$

b) $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{11}{50}x - \frac{21}{250} + e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

c) $y = \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{10}{27}x + A + Be^{-3x}$

d) $y = \frac{1}{3}e^x + e^{x/2}(A\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x)$ e) $y = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})e^x + (Ax + B)e^{-x}$

f) $y = (\frac{1}{2}x^2 + Ax + B)e^{3x}$ g) $y = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + Ae^{-x} + Be^{-2x}$

h) $y = A\cos x + (2x + B)\sin x$

Uppgifter inför KS 6

- DEL B:**
1. Låt $\vec{a} = (2, -1, 2)$ och $\vec{b} = (3, 4, -5)$. Bestäm $\vec{a} + 2\vec{b}$ och $|\vec{a} - \vec{b}|$ och enhetsvektorn i riktningen $3\vec{a} - \vec{b}$.
 2. Visa att punkterna $A=(1,1,1)$, $B=(3,2,2)$ och $C=(4,2,3)$ och $D=(2,1,2)$ bildar hörn i en parallelogram. Beräkna också parallelogrammens area.
 3. Verifiera att vektorerna $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,-1,-9)$ och $\vec{c}=(2,1,-3)$ uppfyller $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
 4. ABCD är basytan (en kvadrat) i en regelbunden fyrsidig pyramid med spetsen S. Låt $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$ och $\vec{SC} = \vec{c}$. Beräkna \vec{SD} .
 5. O, A, B och C är fyra givna punkter i rummet med $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ och $\vec{OC} = \vec{c}$. Bestäm en vektor \vec{OD} uttryckt i \vec{a} , \vec{b} och \vec{c} så att de fyra punkterna A, B, C och D (i valfri ordning) blir hörnen i en parallelogram.
 6. Beräkna (mättet av) vinkeln mellan vektorerna $(1,1,0)$ och $(1,0,1)$. (ON-system).
 7. För vilka värden på konstanten a är vektorerna $(a, 2a, 3a^*a)$ och $(1,-1,a)$ vinkelräta.
 8. Visa att $A(3,0,2)$, $B(4,3,0)$ och $C(8,1,-1)$ är hörn i en rätvinklig triangel. I vilket hörn finns den räta vinkeln?
 9. Låt $\vec{p} = (2,k)$ och $\vec{q}=(3,5)$. Bestäm k sådan att
 - a) \vec{p} och \vec{q} är parallella
 - b) \vec{p} och \vec{q} är rätvinkliga
 - c) vinkeln mellan \vec{p} och \vec{q} är 45 grader.
 10. Beräkna vektorn $\vec{a} \times \vec{b}$ då $\vec{a} = (1,2,3)$ och $\vec{b} = (2,0,-1)$.
 11. Beräkna arean av den triangel, vars hörn är punkterna $(4,1,2)$, $(6,2,-1)$ och $(3,3,4)$.
 12. Beräkna arean av fyrhörningen ABCD då $A = (2,-1)$, $B = (7,3)$, $C = (3,4)$ och $D = (-1,6)$.
 13. Beräkna volymen av tetraedern med hörnen $A = (1,0,2)$, $B = (-2,3,0)$, $C = (0,3,2)$ och $D = (4,3,1)$.

DEZ B!

Svar:

1. $(8,7,-8)$, $5\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{179}}(3,-7,11)$

2. $\sqrt{3}$

4. $\mathbf{a - b + c}$

5. $\mathbf{a - b + c}$ eller $\mathbf{-a + b + c}$ eller $\mathbf{a + b - c}$

6. 60 grader

7. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, ($a = 0$)

9. a) $k = 10/3$ b) $k = -6/5$ c) $k = 1/2$

10. $(-2,7,-4)$

11. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ a.e

12. 21.5 a.e

13. $30/6=5$ v.e