TENTAMEN SF1622 9/1 2013
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(16) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \Rightarrow f''(16) = -\frac{1}{4\cdot(16)^{3/2}} = -\frac{1}{256}$$

Andra ordningens Taylorpolynom till f i $x=16$ ges av

$$P(x) = f(16) + f'(16)(x-16) + \frac{f''(16)}{2}(x-16)^2$$

$$= 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2$$

Detta ger följande approximation till $\sqrt{17}$

$$\sqrt{17} = f(17) \approx P(17) =$$

$$= 4 + \frac{1}{8}(17-16) - \frac{1}{512}(17-16)^2$$

$$= 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} = 4 + \frac{63}{512} \approx 4.12$$

SVAR: $P(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2$

$$\sqrt{17} \approx 4\tfrac{63}{512} \approx 4.12$$

(2.)

a) $$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Partiell Integration} & \\ U = x & V = -\cos x \\ dU = dx & dV = \sin x \, dx \end{array} \right\}$$

$$= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \, dx =$$

$$= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \left[\sin x \right]_0^{\pi} =$$

$$= -\pi \cos \pi + 0 \cos 0 + \sin \pi - \sin 0 = \pi$$

b) $$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Variabel substitution} & \\ t = x^2 & t(0) = 0 \\ dt = 2x \, dx & t(\sqrt{\pi}) = \pi \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{1}{2} \left[-\cos t \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos 0 - \cos \pi \right) = \frac{1}{2} \left(1 - (-1) \right) = 1$$

Svar: a) π b) 1

(3) A är av typ 2×3
B — " — 3×2
C — " — 2×2

a) $\underset{2\times 3}{A}\ \underset{3\times 2}{B}$ är definierad och är av typ 2×2

Eftersom även C är av typ 2×2 kan vi också bilda $AB - C$ och

$$AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}$$

b) $\underset{3\times 2}{B}\ \underset{2\times 2}{C}$ är definierad och av typ 3×2,
men subtraktion med A av typ 2×2
är ej definierat.

c) $\underset{2\times 3}{A}\ \underset{2\times 2}{C}$ är ej definierat,
(A har ej samma antal kolumner
som C har rader).

Svar: a) $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}$

b) Ej definierat uttryck

c) Ej definierat uttryck

(4.) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{2x(x-1) - 1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

Eftersom $x^2-2x-1=0$ har lösningar

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

kan täljaren i y' faktoriseras enligt

$$y' = \frac{\left(x-(1+\sqrt{2})\right)\left(x-(1-\sqrt{2})\right)}{(x-1)^2}$$

Vi gör en teckenstudie av y' för att se var y är växande resp. avtagande.

x		$(1-\sqrt{2})$		1		$(1+\sqrt{2})$	
$x-(1+\sqrt{2})$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-(1-\sqrt{2})$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Av detta följer att

* $y(x)$ är <u>växande</u> på $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ och $(1+\sqrt{2}, +\infty)$
* $y(x)$ är <u>avtagande</u> på $(1-\sqrt{2}, 1)$ och $(1, 1+\sqrt{2})$

* $x = 1-\sqrt{2}$ är lokalt <u>max</u>

och $y(1-\sqrt{2}) = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2+1}{(1-\sqrt{2})-1} = \dfrac{2+1-2\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2-2\sqrt{2}$

* $x = 1+\sqrt{2}$ är lokalt <u>min</u>

och $y(1+\sqrt{2}) = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2+1}{(1+\sqrt{2})-1} = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2+2\sqrt{2}$

4 forts

Grafen har en vertikal asymptot där nämnaren $= 0$ och täljaren $\neq 0$ dvs i $x = 1$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2+1}{x-1} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1 \to 2 > 0 \\ x-1 \to 0+ \end{array} \right\} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2+1}{x-1} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1 \to 2 > 0 \\ x-1 \to 0- \end{array} \right\} = -\infty$$

Grafen har också en sned asymptot av form $y = ax+b$, $a \neq 0$, då grad(täljare) = grad(nämnare)+1

$$y = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}$$

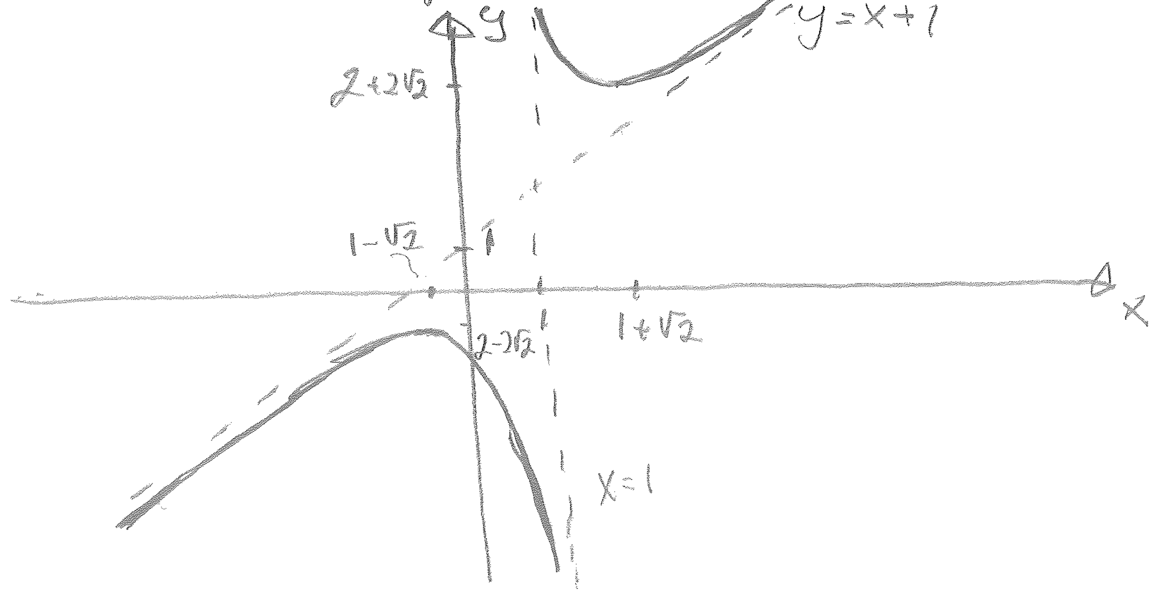
fås genom polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x-1 & x^2+1 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & x+1 \\ & -(x-1) \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\left| y-(x+1) \right| = \left| \frac{2}{x-1} \right| \to 0, \quad x \to \pm\infty$$

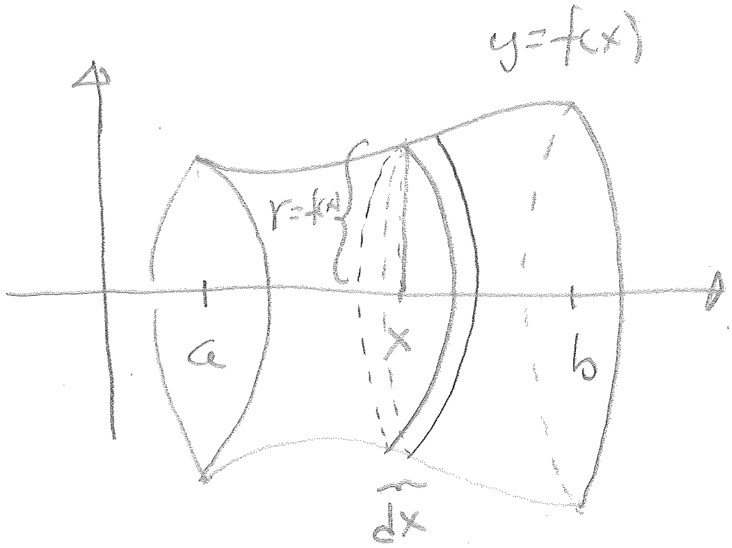
så $y = x+1$ är sned asymptot i $\pm\infty$.

Vi sammanfattar i en skiss:



⑤

a/ & b/



Om $a < x < b$ och om den infinitesimala delen av grafen över intervallet $(x, x+dx)$ roteras kring x-axeln fås en cylindrisk skiva med radie $r = f(x)$ och tjocklek dx, och som då får volym

$$dV = \pi r^2 \cdot dx = \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

Integration ger volymen

$$V = \int dV = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

(6.) Vi löser först den homogena ekvationen
$q'' + 3q' + 2q = 0$.

Den karaktäristiska ekvationen

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \iff r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -2 \vee -1$$

så allmän homogen lösning är

$$q_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

En partikulär lösning till

$$q'' + 3q' + 2q = 5$$

ges av $q_p(t) = \frac{5}{2} \quad (t \geq 0)$

Allmän lösning är då alltså

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) = \frac{5}{2} + Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

Villkoret $q(0) = 4$ ger

$$\frac{5}{2} + A + B = 4 \iff A + B = \frac{3}{2}$$

Derivering av $q(t)$ ger

$$q'(t) = -2Ae^{-2t} - Be^{-t}$$

och villkoret $q'(0) = -3$ ger därför

$$-2A - B = -3 \iff 2A + B = 3.$$

Alltså gäller att

$$\begin{cases} A + B = 3/2 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3/2 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{så} \quad \underline{q(t) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}}$$

Det innebär att $q(t)$ <u>avtar</u> exponentiellt från $q(0) = 4$ mot asymptoten $y = \frac{5}{2}$ när t växer

(7) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2-2x+5}.$$

Eftersom $\frac{1}{x^2-2x+5} = \frac{1}{(x-1)^2+4}$ är definierad för alla x i $[1,\infty)$ är integralen endast generaliserad p.g.a. det obegränsade integrationsintervallet.

Vidare är $$\int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \left\{ \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+4},$$

så integralen är konvergent genom jämförelse med känt konvergenta integralen $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$, eftersom $0 < \frac{1}{t^2+4} < \frac{1}{t^2}$.

Vi beräknar slutligen

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2}\,dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{u^2+1}$$

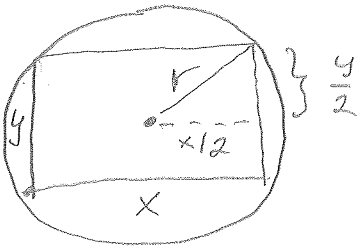
$$= \frac{1}{2}\Big[\arctan u\Big]_0^\infty = \frac{1}{2}\lim_{U\to\infty} \arctan U - \arctan 0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

<u>SVAR:</u> Integralen är konvergent med värdet $\pi/4$

(8.) $W = \frac{xy^2}{6}$ skall maximeras.

ur figuren



$r > 0$

$x > 0$

$y > 0$

fås sambandet

$$r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \iff 4r^2 = x^2 + y^2 \iff y^2 = 4r^2 - x^2$$

dvs

$$W = \frac{xy^2}{6} = \frac{1}{6}x(4r^2 - x^2) = \frac{2}{3}r^2x - \frac{1}{6}x^3$$

Då är

$$W' = \frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{2}x^2$$ så kritiska punkter ges av

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}r^2 \iff x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}r^2}$$

så enda positiva kritiska punkt är $x = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

Teckenstudium av W' ger

x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}r$	
W'		$+++$	0	$----$
W		$\nearrow$		$\searrow$

vilket visar att $x = \frac{2}{\sqrt{3}}r$ är globalt maximum.

Motsvarande y-värde är

$$y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\right) = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3}r^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$$

SVAR: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$

$y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$

(9.) Vi skriver systemet på matrisform och Gauss-eliminerar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & -1 & 1 & \beta \\ 3 & 2 & 2 & 2 & \gamma \\ 0 & 4 & -5 & 1 & \delta \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 5 & -1 & \alpha-2\beta \\ 1 & 2 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & -4 & 5 & -1 & \gamma-3\beta \\ 0 & 4 & -5 & 1 & \delta \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ (1) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-2\beta+\delta \\ 1 & 2 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma-3\beta+\delta \\ 0 & 4 & -5 & 1 & \delta \end{array}\right)$$

Om $\alpha-2\beta+\delta \neq 0$ eller $\gamma-3\beta+\delta \neq 0$ (t.ex om $\alpha = 1$ eller $\gamma = 1$ och $\beta=\delta=0$) saknar systemet lösningar.

Om $\alpha-2\beta+\delta = \gamma-3\beta+\delta = 0$ fås systemet med matris

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 4 & -5 & 1 & \delta \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & \beta-\delta \\ 0 & 4 & -5 & 1 & \delta \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x-2y+4z = \beta-\delta \\ 4y-5z+w = \delta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x=(\beta-\delta)+2y-4z \\ w=\delta-4y+5z \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=(\beta-\delta)+2t-4s \\ y=t \\ z=s \\ w=\delta-4t+5s \end{cases}$$

där t och s är godtyckliga parametrar.

9. forts

SVAR:

Om $\alpha - 2\beta + \delta = \gamma - 3\beta + \delta = 0$
har systemet oändligt många lösningar i annat fall saknas lösningar.

Speciellt kan systemet inte ha entydig lösning för något högerled. Fallet med exakt två lösningar kan inte heller inträffa, det gäller ju också allmänt att ett linjärt system som är lösbart och har fler än en lösning automatiskt har oändligt många lösningar.

(10.) Låt $f(t) = e^t$, vi har då att

$e^x - e^y = f(x) - f(y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Diff.-kalkylens} \\ \text{medelvärdessats} \end{array} \right\}$

$= f'(c)(x-y) = e^c(x-y)$.

för något c, $y < c < x$.

Eftersom $c > y > 0$ är $e^c > e^0 = 1$

Det följer att

$e^x - e^y = e^c(x-y) > x - y$

eftersom $e^x - e^y > 0$ och $x - y > 0$ om $x > y$.

Svar: $e^x - e^y > x - y$ för alla $0 < y < x$ enligt ovan.