

KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 9/1 2013 kl 08.00–13.00
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

A: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II, **B:** 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II. **C:** 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II. **D:** 18 poäng **E:** 16 poäng.

Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E): 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lycka till!

Del I

(1) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till $f(x) = \sqrt{x}$ i punkten $x = 16$, och använd sedan detta för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{17}$.

(2) Beräkna de bestämda integralerna

$$\text{a) } \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad (2 \text{ p}) \quad \text{b) } \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \quad (2 \text{ p})$$

(3) Låt A , B och C var matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix},$$

Vilket eller vilka av följande uttryck är definierade? Beräkna detta/dessa och förklara för de övriga varför de ej är definierade.

$$\text{a) } AB - C \quad \text{b) } BC - A \quad \text{c) } AC - B$$

(4) Skissera grafen

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1},$$

och bestäm alla lokal extrempunkter och extremvärden. Ange också alla relevanta asymptoter och gränsvärden.

- (5) Om området $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$, där f är en kontinuerlig och positiv funktion, roteras kring x -axeln genereras en kropp K .
- a) Ange en integralformel för volymen av K . (1 p)
- b) Härled den integralformel du angivit i a). (3 p)
- (6) En elektrisk krets består av en kondensator, ett motstånd, en spole och en strömkälla. Laddningen över kondensatorn kommer att variera med tiden t (sekunder) och beskrivs av funktionen $q(t)$ (coulomb) som uppfyller

$$q'' + 3q' + 2q = 5, \quad q(0) = 4, \quad q'(0) = -3.$$

Bestäm $q(t)$ och beskriv också med ord hur laddningen över kondensatorn varierar för $t > 0$.

Del II

- (7) Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}.$$

Avgör om integralen är konvergent eller divergent och beräkna i förekommande fall dess värde.

- (8) Ur en trädstam i form av en rät cirkulär cylinder med radien r skall sågas en balk med rektangulärt tvärsnitt. Böjmotståndet W hos balken ges av formeln

$$W = \frac{xy^2}{6},$$

där x betecknar bredden och y betecknar höjden på balkens tvärsnitt. Hur skall balken dimensioneras för att böjmotståndet skall bli maximalt?

- (9) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3z + w = \alpha \\ x + 2y - z + w = \beta \\ 3x + 2y + 2z + 2w = \gamma \\ 4y - 5z + w = \delta \end{cases}$$

Går det att finna värden på högerledet α , β , γ och δ så att systemet

a) saknar lösning b) har precis en lösning c) har precis två lösningar d) har oändlig många lösningar ?

- (10) Är det sant att $e^x - e^y > x - y$ för alla reella tal $0 < y < x$?