Tentamen SF1622 7/6 2012
Svar & lösningsförslag

(1.) Tangentlinjens ekvation i $(a, \sqrt{a})$ är

$$(y - \sqrt{a}) = y'(a)(x-a).$$

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

så tangentens ekvation är

$$y - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a). \qquad (*)$$

Vi söker nu $a$ sådant att $(0,1)$ satisfierar $(*)$:

$$1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(0-a) \Leftrightarrow 1-\sqrt{a} = -\frac{a}{2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{a} = -\frac{1}{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

<u>SVAR:</u> $a=4$

<u>Kontroll:</u> För $a=4$ bestämmer vi tangenten genom $(a, \sqrt{a}) = (4,2)$:

$$y-2 = \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) \Leftrightarrow y-2 = \frac{1}{4}(x-4)$$

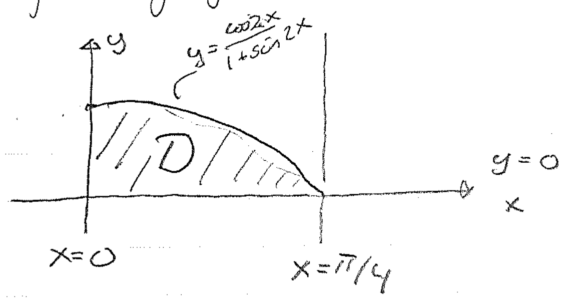
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{4} + 1 \quad \text{som passerar } (0,1).$$

(2.) Först konstaterar vi att

$$y = \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} \geq 0 \quad \text{då} \quad 0 \leq x \leq \pi/4$$

eftersom $\cos t$ och $\sin t$ båda är $\geq 0$ då $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Vi får följande skiss




Eftersom $y = \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi/4$ är

$$\text{Area}(D) = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} t = 1+\sin 2x & t(\pi/4) = 1+\sin(2\cdot\frac{\pi}{4}) = 2 \\ \frac{dt}{dx} = 2\cos 2x & t(0) = 1+\sin 0 = 1 \\ \frac{1}{2}dt = \cos 2x\,dx & \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

<u>SVAR:</u> $\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\ln 2$ a.e.

(3.) Vi skriver ekvationssystemet på matrisform och löser det med Gauss-elimination.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -1 & -3 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \neq \\ \neq \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} y - z + 2w = 1/3 \\ x \quad\quad + w = 1/3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 1/3 - w \\ y = 1/3 + z - 2w \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/3 - t \\ y = 1/3 + s - 2t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

<u>SVAR:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$s, t$ godtyckliga.

(4.) Låt $p(x) = 8x^3 - 36x^2 + 46x$. Då är

$p(0) = 0 < 15$

$p(1) = 18 > 15$

$p(2) = 8\cdot 8 - 36\cdot 4 + 46\cdot 2 = 64 - 144 + 92$
$= 156 - 144 = 12 < 15$

$p(3) = 8\cdot 3^3 - 36\cdot 3^2 + 46\cdot 3 =$
$= 3\,(72 - 108 + 46) = 3\cdot(118 - 108) = 30 > 15$

Eftersom $p(x)$, ett polynom, är en kontinuerlig funktion kan vi tillämpa satsen om mellanliggande värde (SMV) på $p$.

$\begin{matrix} p(0) < 15 \\ p(1) > 15 \end{matrix} \overset{SMV}{\Longrightarrow} p(x_0) = 15$, ngt $x_0 \in (0,1)$

$\begin{matrix} p(1) > 15 \\ p(2) < 15 \end{matrix} \overset{SMV}{\Longrightarrow} p(x_1) = 15$, ngt $x_1 \in (1,2)$

$\begin{matrix} p(2) < 15 \\ p(3) > 15 \end{matrix} \overset{SMV}{\Longrightarrow} p(x_2) = 15$, ngt $x_2 \in (2,3)$.

<u>SVAR:</u> Ja, $8x^3 - 36x^2 + 46x = 15$ har en rot i vart och ett av intervallen.

(5.)

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1+x^2} \ (*) \underset{f(x)\neq 0}{\overset{\text{om}}{\Longleftrightarrow}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|f(x)| = \arctan x + C'$$

$$\Rightarrow |f(x)| = e^{\arctan x + C'} \qquad (**)$$

Dvs. en funktion $f(x)$ som uppfyller given differentialekvation $(*)$ måste uppfylla $(**)$ på varje intervall där $f(x) \neq 0$.

Villkoret $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) > 0$ (för stora värden på $x$), alltså väljer vi

$$f(x) = e^{\arctan x + C'}$$

Villkoret $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ger då också

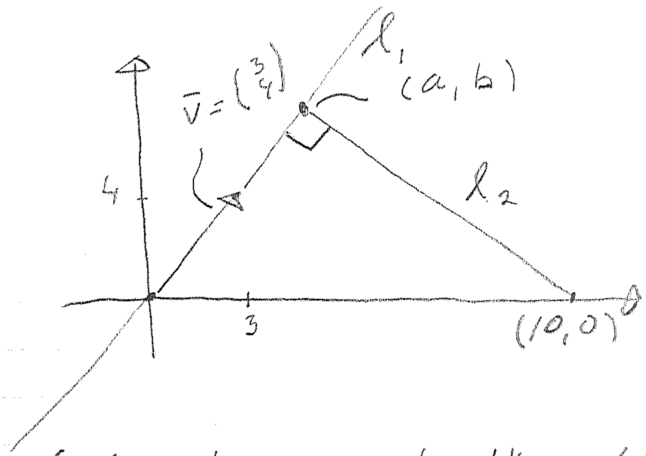
$$1 = \lim_{x\to\infty} e^{\arctan x + C'} = e^{\pi/2 + C'}$$

$\Rightarrow C' = -2$.

Genom insättning i $(*)$ verifieras att $f(x) = e^{-\pi/2 + \arctan x}$ är en lösning

SVAR: $f(x) = e^{-\pi/2 + \arctan x}$

(6.)




Seglaren började segla längs linjen $l_1$ i riktning $\bar{v} = \binom{3}{4}$.

$$l_1: \binom{x}{y} = t\binom{3}{4}$$

Vi söker punkten $(a, b) = (3u, 4u)$ på $l_1$ sådan $l_2$ genom $(a, b)$ och $(10, 0)$ bildar rätvinkel mot $l_1$

En riktningsvektor $\bar{w}$ för $l_2$ fås som

$$\bar{w} = \binom{10}{0} - \binom{a}{b} = \binom{10}{0} - \binom{3u}{4u} = \binom{10-3u}{-4u}.$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{v} \perp \bar{w} \Leftrightarrow \bar{v}\cdot\bar{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow \binom{10-3u}{-4u}\cdot\binom{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 30 - 9u - 16u = 0$$

$$\Leftrightarrow 25u = 30 \Leftrightarrow u = \frac{6}{5}.$$

Alltså är $(a, b) = (3\cdot\frac{6}{5}, 4\cdot\frac{6}{5}) = (\frac{18}{5}, \frac{24}{5})$
$= (3.6, 4.8)$

SVAR: 1 punkten $(\frac{18}{5}, \frac{24}{5})$

7

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x^3}, \quad 1 \leq x < \infty.$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{(-2)}{2x^3} - \frac{2(-3)}{x^4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}$

$= \frac{6 + x - x^2}{x^4}$

Vi bestämmer nollställen till $f'$

$f' = 0 \Leftrightarrow 6 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee 3$

så $x = 3$ är derivatans enda nollställe på $[1, \infty)$.

Vi kan nu också faktorisera $-(x^2 - x - 6) = -(x-3)(x+2)$

Så $f'(x) = -\frac{(x-3)(x+2)}{x^4}$. Vi får följande

TECKENSCHEMA $f'$

| $x$ | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{(x+2)}{x^4}$ | | - | - | - | - |
| $x-3$ | | - | - | 0 | + |
| $f'$ | | + | + | 0 | - |
| $f$ | | ↗ | | | ↘ |

Vi beräknar

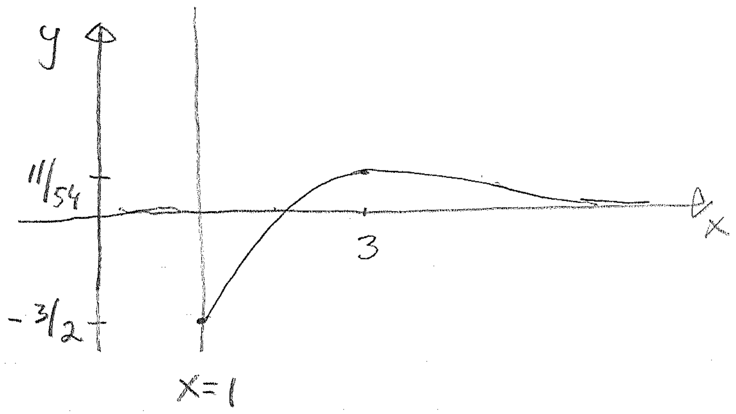
$f(1) = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$f(3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 9} - \frac{2}{27}$

$= \frac{18 - 3 - 4}{54} = \frac{11}{54}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Detta ger följande utseende på grafen $y = f(x)$




Observera att
$f$ avtagande $x > 3$
$f(3) > 0$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
$\Rightarrow 0 < f(x) < f(3)$ då $x > 3$

Alltså är $f_{min} = f(1) = -3/2$

$f_{max} = f(3) = 11/54$

$V_f = \{y = f(x) ;\ 1 \leq x < \infty\} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{11}{54}\right]$

SVAR: $\left[-3/2, 11/54\right]$

8 a) • $\frac{1}{x^{1/3}e^x} > 0$ , $x \geq 1$

så integranden är positiv.

• $\frac{1}{x^{1/3}e^x} = \frac{1}{x^{1/3}} \cdot \frac{1}{e^x} < \frac{1}{e^x}$ då $x > 1$

• $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty =$

$= e^{-1} - \lim_{A\to\infty} e^{-A} = 1/e.$

Då $\int_1^\infty 1/e^x\,dx$ är konvergent och $0 < \frac{1}{x^{1/3}e^x} < \frac{1}{e^x}$

följer att även $\underline{\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}e^x}\,dx \text{ är konvergent}}$

b) På intervallet $0 < x < 1$ gäller att

$\frac{1}{x^{1/3}e^x} \leq \frac{1}{x^{1/3}e^0} = \frac{1}{x^{1/3}}$ och

$\frac{1}{x^{1/3}e^x} \geq \frac{1}{x^{1/3}e} = > \frac{1}{3x^{1/3}}$

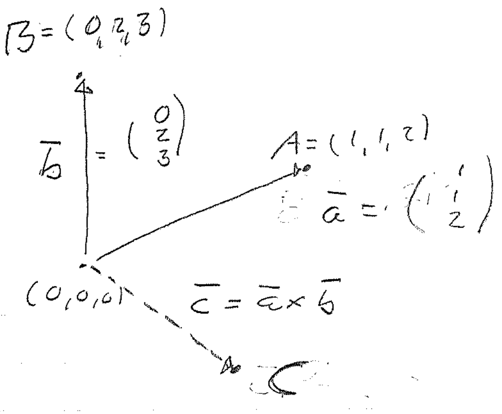
Alltså är

$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}e^x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$

och $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx = \left[\frac{3x^{2/3}}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

så $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}e^x}\,dx \leq \frac{3}{2}.$ V.S.B.

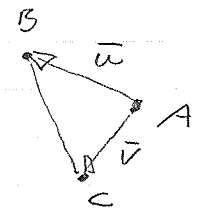
9.




$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$

Triangeln har alltså sina hörn i

$A = (1,1,2)$ , $B = (0,2,3)$ , $C = (-1,-3,2)$




Låt $\bar{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \bar{b} - \bar{a} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\bar{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \bar{c} - \bar{a} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$

$\bar{u}$ och $\bar{v}$ är de två kantvektorer i triangeln T. Enligt sats gäller då att

$\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\left|\bar{u} \times \bar{v}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

<u>Svar:</u> $\sqrt{14}$ a.e.

(10.) Det sökta 3:e grads polynomet är 3:e ordningens MacLaurin polynom till $f$

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2+t}\,dt \quad , \quad f(0) = \int_0^0 \dots dt = 0$$

$$f'(x) \underset{\text{HUVUDSATS}}{\overset{\text{KALKYLENS}}{=}} e^{x^2+x} \quad , \quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = (2x+1)\,e^{x^2+x} \qquad f''(0) = 1 \cdot e^0 = 1$$

$$f'''(x) = 2e^{x^2+x} + (2x+1)e^{x^2+x} \qquad f'''(0) = 2+1 = 3$$

3:e ordningens MacLaurin polynom till $f$ ges av

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{3!}x^3$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Kontroll: $P(0) = 0 = f(0)$

$P'(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2$, $\quad P'(0) = 1 = f'(0)$

$P''(x) = 1 + 3x \quad P''(0) = 1 = f''(0)$

$P'''(x) = 3 \quad P'''(0) = 3 = f'''(0)$

<u>Svar:</u> $P_3(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$