KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 7/6 2012 kl 08.00–13.00
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.
A: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II, **B:** 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II. **C:** 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II. **D:** 18 poäng **E:** 16 poäng.
Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E)**:** 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) Betrakta tangentlinjen till grafen $y = \sqrt{x}$ i punkten $(a, \sqrt{a})$. För vilket värde på a går tangentlinjen genom punkten $(0, 1)$?

(2) Bestäm arean av området D som begränsas av linjerna $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = 0$ och kurvan $y = \dfrac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$.
Tips: Använd substitutionen $t = 1 + \sin 2x$.

(3) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y - z + 4w = 1 \\ x - y + z - w = 0 \\ x + 2y - 2z + 5w = 1 \\ 3x + 3w = 1 \end{cases}.$$

(4) Är det sant att ekvationen $8x^3 - 36x^2 + 46x = 15$ har en rot i vart och ett av de tre öppna intervallen $(0, 1)$, $(1, 2)$ och $(2, 3)$?

(5) Bestäm en funktion $f(x)$ sådan att

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}, \qquad \text{för alla reella tal } x,$$

och som dessutom är sådan att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(6) En seglare startar från origo i riktningen $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Hen avser att göra en enda rätvinklig riktningsförändring så att hen träffar hamninloppet, som är beläget i punkten $(10, 0)$. I vilken punkt skall kursändringen göras?

Del II

(7) Låt funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{2}{x^3}$ vara definierad för $1 \le x < \infty$. Bestäm värdemängden till $f(x)$, dvs mängden $\{y = f(x) \;\text{ där } 1 \le x < \infty\}$.

(8) a) Avgör om integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}e^x}\,dx.$$

är konvergent eller divergent.

(2p)

b) Visa att

$$\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}e^x}\,dx \le \frac{3}{2}$$

(2p)

(Om du i b) endast visar att integralen är konvergent får du 1 poäng)

(9) Bestäm arean av den triangel vars hörnpunkter har ortsvektorerna

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

(10) Finn ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0) \quad \text{och} \quad p'''(0) = f'''(0)$$

där $f(x) = \int_0^x e^{t^2+t}dt$.