KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 11/2 2012 kl 08.00–13.00
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.
A: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II, **B:** 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II. **C:** 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II. **D:** 18 poäng **E:** 16 poäng.
Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E)**:** 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) Har funktionen $f(x) = x^2 e^{-2x}$ något största eller minsta värde på det öppna intervallet $-2 < x < 2$? Bestäm i sådana fall dessa.

(2) Beräkna integralen
$$\int_0^{1/2} \frac{x^3}{1+2x}\,dx.$$
med hjälp av substituionen $t = 1 + 2x$.

(3) Tre plan i rummet ges av ekvationerna $2x + 4y - 3z = 1$, $5x - y + 2z = 12$ samt $3x + 3y - 2z - 4 = 0$. Finns det någon eller några punkter i rummet som tillhör alla tre planen? Ange i så fall denna eller dessa.

(4) En rätvinklig triangel skall konstrueras så att hypotenusan har sin ena ändpunkt i origo och sin andra ändpunkt på den del av enhetscirklen som ligger i första kvadranten. Vidare skall en kateten ligga längs med positiva x-axeln. Vilken är den största area en sådan triangel kan ha?

(5) Ange formeln för partiell integration, och visa hur den kan härledas ifrån en av de vanliga deriveringsreglerna. Visa också med ett exempel hur man kan använda formeln för partiell integration.

(6) Lös differentialekvationen

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{-x}$$

med begynnelsevärdena $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

Del II

(7) a) Formulera Taylors formel för en reellvärd funktion f av en reell variabel. Nödvändiga försättningar på funktionen f skall anges. (2 p)

b) Beräkna ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $\ln \dfrac{11}{10}$ med hjälp av Taylors formel. (2 p)

(8) Linjen L går igenom punkterna $(-1, -3, 0)$ och $(-3, -2, 1)$. Linjen K går igenom punkterna $(4, 2, 3)$ och $(5, 1, 4)$. Bestäm avståndet mellan linjerna.

(9) Till en tank som rymmer 1ℓ har det anslutits två rör. Genom det ena strömmar det in vätska i tanken med en tidsberoende hastighet $i(t) = \dfrac{1}{4t^2 + 1}\ell/s$ för $t > 0$, och genom det andra strömmar det ut vätska med den tidsberoende hastigheten $u(t) = \dfrac{1}{(2t+1)^2}\ell/s$ för $t > 0$. Variabeln t är en tidsvariabel med enheten s (sekunder). Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. Bestäm den funktion $V(t)$ som beskriver hur mycket vätska tanken innehåller vid tiden $t > 0$. Avgör också om tanken vid något tillfälle kommer att vara full, och i sådana fall när detta inträffar.

(10) För vilka värden på p gäller det att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \cos x - \sin x - p}{x^p \sin x}$$

existerar och är $\neq 0$? Beräkna också gränsvärdet i dessa fall.