KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 31/5 2011 kl 08.00–13.00
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra
SVAR OCH LÖSNINGSFÖRSLAG

Del I

(1) Avgör om funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$, antar något största respektive minsta värde. Bestäm i så fall dessa.

Funktionen är definierad för alla x och $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde). Vi deriverar och får (efter förenkling)

$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

som existerar för alla x och är lika med 0 om och endast om $x = \pm 1$. Vi teckenstuderar derivatan och ser att

om $x < -1$ så är $f'(x) < 0$ och f alltså strängt avtagande,

om $-1 < x < 1$ så är $f'(x) > 0$ och f alltså strängt växande,

om $x > 1$ så är $f'(x) < 0$ och f alltså strängt avtagande.

Det följer av ovanstående att f antar sitt minsta värde i $x = -1$ och sitt största värde i $x = 1$. Funktionens minsta värde är alltså $f(-1) = -e^{-1/2} = -1/\sqrt{e}$ och funktionens största värde är $f(1) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$.

Svar: Största värdet är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ och minsta värdet är $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.

(2) Betrakta integralen

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx.$$

a) Använd substitutionen $u = \ln x$ för att skriva om integralen. (2p)

b) Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i a). (2p)

a) Med $u = \ln x$ som är injektiv blir $du = dx/x$ och $x = 1 \Leftrightarrow u = 0$ och $x = e \Leftrightarrow u = 1$ och vi får

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx = \int_0^1 u^4\,du.$$

b) Vi beräknar integralen i A och får

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx = \int_0^1 u^4\,du = \frac{1}{5}.$$

Svar: a) $\int_0^1 u^4\,du$. b) 1/5

(3) Tre punkter $P = (1,0,1)$, $Q = (2,1,3)$ och $R = (0,-1,0)$ är givna. (ON-system)

a) Bestäm en ekvation för planet genom de tre punkterna P, Q och R. (2p)

b) Beräkna arean av triangeln med hörnpunkter P, Q och R. (1p)

c) Bestäm en ekvation för den linje genom punkten Q som är vinkelrät mot planet i a). (1 p)

a) Vi bildar vektorerna $\mathbf{u} = \vec{PQ} = (2,1,3)^T - (1,0,1)^T = (1,1,2)^T$ och $\mathbf{v} = \vec{PR} = (0,-1,0)^T - (1,0,1)^T = (-1,-1,-1)^T$ som är parallella med sökt plan. Det följer att deras krysspordukt är en normalvektor till sökt plan.

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1,-1,0)^T$$

Punkt-normalformen av planets ekvation ger (vi använder $\mathbf{n}$ och punkten R) att sökt plan har ekvation

$$1 \cdot (x-0) + (-1) \cdot (y - (-1)) + 0 \cdot (z-0) = 0 \iff x - y = 1.$$

b) Arean ges av

$$\frac{1}{2}||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

c) Linjen ortogonal mot planet i a) och genom punkten Q har ekvation

$$(x,y,z) = \vec{OQ} + t\mathbf{n} = (2,1,3)^T + t(1,-1,0)^T.$$

Svar: a) $x - y = 1$, b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $(x,y,z) = (2,1,3)^T + t(1,-1,0)^T$.

(4) Bestäm andra ordningens MacLaurinpolynom (Taylorpolynomet i origo) till $f(x) = \ln(1+x)$. Beräkna sedan med hjälp av detta ett närmevärde till $\ln(1.1)$. Avgör slutligen om ditt närmevärde har ett fel vars absolutbelopp är mindre än 0.001.

Vi deriverar och får $f'(x) = 1/(1+x)$ och $f''(x) = -1/(1+x)^2$ och $f'''(x) = 2/(1+x)^3$ som alla är kontinuerliga för $x > -1$. I origo får vi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ och $f''(0) = -1$ så det sökta Maclaurinpolynomet är alltså

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

Eftersom Maclaurinpolynomet approximerar funktionen för x nära noll får vi att

$$\ln(1.1) = f(0.1) \approx p(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^2}{2} = 0.095.$$

Ett närmevärde till $\ln(1.1)$ är alltså 0.095.

Enligt Taylors formel får vi att felet $f(0.1) - p(0.1) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}0.1^3$ för något tal ξ mellan 0 och 0.1. I det aktulla intervallet är $|f'''(\xi)| \leq 2$ och alltså är absolutbeloppet av felet högst $\dfrac{2}{3!}0.1^3 = \dfrac{1}{3} \cdot 0.001$ som är mindre än 0.001.

(5) Beräkna arean av det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ och $y = x - 2$.

Skärningspunkterna mellan kurvorna fås då $\pm\sqrt{x} = x-2$. Vi kvadrerar och får andragradsekvationen $x = x^2-4x+4$ som är ekvivalent med $x^2-5x+4 = 0$ med lösningar $x = 1$ och $x = 4$. Vi ser att linjen med ekvation $y = x - 2$ skär parabeln $y = -\sqrt{x}$ i punkten $(1, -1)$ och linjen skär parabeln $y = \sqrt{x}$ i punkten $(4, 2)$. Den sökta arean blir därför

$$\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2))\,dx = ... = \frac{9}{2}.$$

Svar: 9/2

(6) Utslagsvinkeln $\alpha = \alpha(t)$ [radianer] som funktion av tiden t [s] för en plan pendel uppfyller differentialekvationen $\alpha'' + (g/L)\sin\alpha = 0$, där g [m/s^2] är tyngdkraftsaccelerationen och L [m] är pendelns längd. Med approximationen $\sin\alpha \approx \alpha$, som gäller för små värden på α, fås ekvationen

$$\alpha'' + \frac{g}{L}\alpha = 0.$$

Lös denna differentialekvation och bestäm pendelns läge en sekund efter det att den släpps ifrån vilande läge med utslagsvinkel 3 grader, dvs $\pi/60$ radianer, om $L = 0.2$. Räkna med att $g = 9.8$.

Ersätter vi g med 9.8 och L med 0.2 får vi diffekvationen $\alpha''(t)+49\alpha(t) = 0$. Den har karaktäristisk ekvation $r^2 + 49 = 0$ med lösningar $r = \pm 7i$ så diffekvationen har alltså allmän lösning

$$\alpha(t) = A\cos 7t + B\sin 7t,$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Med hjälp av initialvillkoren kan vi nu bestämma konstanterna. Att pendeln släpps från vila innebär att hastigheten är noll i startögonblicket, dvs. att att $\alpha'(0) = 0$ vilket ger att $B = 0$. Den andra villkoret, $\alpha(0) = \pi/60$, ger att $A = \pi/60$. Vårt initialvärdesproblem har alltså lösningen

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{60}\cos 7t.$$

Vi ser att pendelns läge efter en sekund approximativt är

$$\alpha(1) = \frac{\pi}{60}\cos 7 \text{ radianer.}$$

Svar: $\frac{\pi}{60}\cos 7$ radianer.

Del II

(7) a) Härled formeln för beräkning en funktionskurvas båglängd. (2p)

b) Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$. (2p)

För häreldning, se läroboken (Persson-Böiers) sid 334-336. Med $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ är $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$ och längden av kurvan ges av

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}).$$

Svar: b) $\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}$

(8) Bestäm det kortaste avståndet från punkten $P(3, 1, -1)$ till det plan som ges av ekvationen $2x + y - z = 6$. Bestäm också koordinaterna för den punkt i planet som ligger närmast punkten P.

Låt Q vara den i planet som ligger närmast P. Då är $\overrightarrow{QP}$ en normal till planet. Linjen l genom P och Q har planets normalvektor $\mathbf{n} = (2, 1, -1)^T$ som riktningsvektor, så l ges av

$$(x, y, z)^T = (3, 1, -1)^T + t(2, 1, -1)^T.$$

Vi söker det t värde för vilket l skär planet, dvs punkten Q, genom att sätta in koordinaterna för en godtycklig punkt på l i planets ekvation,

$$2(3 + 2t) + (1 + t) - (-1 - t) = 6 \iff t = -\frac{1}{3}$$

Alltså har Q kooridnater $(x, y, z) = (3, 1 - 1)1/3(2, 1, -1) = (7/3, 2/3, -2/3)$.

Det sökta avständet ges av $||\overrightarrow{QP}|| = ... = \sqrt{6}/3$.

Svar: Punkten i planet närmast P har koordinater $(7/3, 2/3, -2/3)$. Avståndet är $\sqrt{6}/3$ l.e.

(9) a) Är det sant att

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} < \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

för alla heltal $n \geq 1$? (2p)

b) Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ konvergent? (2p)

a) Med $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ så är f definierad och kontinuerlig på $x \geq 0$. Vidare är $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$ som är definierat och negativt för $x > 0$. Det följer att f är strängt avtagande på intervallet $x \geq 0$. Summan i uppgiften kan skrivas $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ och för varje k gäller, eftersom f är strängt avtagande, att $f(k) < \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$. Det följer att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} < \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx$ för alla heltal $n \geq 1$.

b) Vår funktion f ovan är kontinuerlig, positiv och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Enligt Cauchys integralkriterium är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ konvergent om och endast om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent. Vi beräknar integralen med hjälp av substitutionen $u = \sqrt{x}$ och partiell integration och får att

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\infty} 2ue^{-u}\,du = \ldots = \frac{4}{e}.$$

Integralen är alltså konvergent och då måste serien också vara konvergent.

(10) Funktionen f defineras genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Bestäm först konstanten c sådan att f blir kontinuerlig i $x = 0$. Beräkna sedan också, för detta detta värde på c, $f'(0)$ och $f''(0)$.

a) Funktionen f är kontinuerlig i origo om och endast om $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Eftersom $f(0) = c$ och $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (standardgränsvärde) så ska vi välja $c = 1$ för att f ska bli kontinuerlig i origo.

b) Vi beräknar först $f'(0)$. Vi får

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h - h^3/6 + O(h^5) - h}{h^2} = 0.$$

Alltså är $f'(0) = 0$. För andraderivatan gör vi på liknande sätt:

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\cos h - \sin h - 0}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{h(1 - h^2/2 + O(h^4)) - (h - h^3/6 + O(h^5)}{h^3} = -\frac{1}{3}.$$

Alltså är $f''(0) = -1/3$.

Svar: A. $c = 1$. B. $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1/3$..