KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 31/5 2011 kl 08.00–13.00
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.
A: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II, **B:** 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II. **C:** 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II. **D:** 18 poäng **E:** 16 poäng.
Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E)**:** 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) Avgör om funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$, antar något största respektive minsta värde. Bestäm i så fall dessa.

(2) Betrakta integralen
$$\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx.$$

a) Använd substitutionen $u = \ln x$ för att skriva om integralen. (2p)

b) Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i a). (2p)

(3) Tre punkter $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 1, 3)$ och $R = (0, -1, 0)$ är givna. (ON-system)

a) Bestäm en ekvation för planet genom de tre punkterna P, Q och R. (2p)

b) Beräkna arean av triangeln med hörnpunkter P, Q och R. (1p)

c) Bestäm en ekvation för den linje genom punkten Q som är vinkelrät mot planet i a). (1 p)

(4) Bestäm andra ordningens MacLaurinpolynom (Taylorpolynomet i origo) till $f(x) = \ln(1 + x)$. Beräkna sedan med hjälp av detta ett närmevärde till $\ln(1.1)$. Avgör slutligen om ditt närmevärde har ett fel vars absolutbelopp är mindre än 0.001.

(5) Beräkna arean av det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ och $y = x - 2$.

(6) Utslagsvinkeln $\alpha = \alpha(t)$ [radianer] som funktion av tiden t [s] för en plan pendel uppfyller differentialekvationen $\alpha'' + (g/L)\sin\alpha = 0$, där g [m/s^2] är tyngdkraftsaccelerationen och L [m] är pendelns längd. Med approximationen $\sin\alpha \approx \alpha$, som gäller för små värden på α, fås ekvationen

$$\alpha'' + \frac{g}{L}\alpha = 0.$$

Lös denna differentialekvation och bestäm pendelns läge en sekund efter det att den släpps ifrån vilande läge med utslagsvinkel 3 grader, dvs $\pi/60$ radianer, om $L = 0.2$. Räkna med att $g = 9.8$.

Del II

(7) a) Härled formeln för beräkning en funktionskurvas båglängd. (2p)

b) Beräkna längden av kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$. (2p)

(8) Bestäm det kortaste avståndet från punkten $P(3, 1, -1)$ till det plan som ges av ekvationen $2x + y - z = 6$. Bestäm också koordinaterna för den punkt i planet som ligger närmast punkten P.

(9) a) Är det sant att

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} < \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

för alla heltal $n \geq 1$? (2p)

b) Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ konvergent? (2p)

(10) Funktionen f defineras genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Bestäm först konstanten c sådan att f blir kontinuerlig i $x = 0$. Beräkna sedan också, för detta detta värde på c, $f'(0)$ och $f''(0)$.