KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 13/1 2011 kl 14–19
SF1622 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.
A: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II, **B:** 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II. **C:** 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II. **D:** 18 poäng **E:** 16 poäng.
Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E): 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) Skissera grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1+x^2}{e^x}$, $-\infty < x < \infty$. Ange också
- var funktionen är växande respektive avtagande;
- alla eventuella kritiska punkter och deras karraktär;
- alla eventuella lokala respektive globala extremvärden;
- alla relevanta gränsvärden och asymptoter.

(2) a) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx$$

med hjälp av substitutionen $u = x^2+4x+5$. (2p)

b) Härled formeln för partiell integration utifrån formeln för derivering av en produkt. (2p)

(3) Låt $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$.

a) Bestäm en enhetsvektor $\mathbf{v}$ som är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och parallell med xy-planet. (2 p)

b) Bestäm en enhetsvektor $\mathbf{w}$ som är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ asom $\mathbf{v}$. (2p)

(4) Bestäm andra ordningens MacLaurinpolynom $M_2(x)$ till $f(x) = (1+x)^{(3/2)}$. Visa också att det fel som uppstår då $f(x)$ approximeras med $M_2(x)$ har ett absolutbelopp som är mindre än 10^{-4} om $0 < x < 0.1$.

(5) Bestäm alla lösningar till $g(x)$ till differentialekvationen

$$g'' - g' - 6g = 12x$$

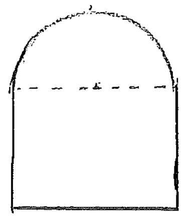
sådana att $y = g(x)$ har en sned asymptot $y = ax + b$ när $x \to \infty$. Ange också asymptoten, dvs ange dess koefficienter a och b.

(6) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ 3x + 4y + 5z + 6w = 7 \end{cases} .$$

Del II

(7) Ett kyrkfönster ska utformas i form av en rektangel där övre sidan har bytts ut mot en halvcirkel (se figur).



Hur skall fönstrets proportioner väljas för att dess yta skall bli så stor som möjligt för en given omkrets?

(8) Bestäm det kortaste avståndet från punkten $P(3, 1, -1)$ till det plan som ges av ekvationen $2x + y - z = 6$. Bestäm också koordinaterna för den punkt i planet som ligger närmast punkten P.

(9) Visa att

$$\frac{1}{16} < \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} < 1.$$

(Den som endast visar att $\sum_{k=4}^{\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$ är konvergent får två poäng på denna uppgift.)

(10) En tråds vänstra ände är fäst i origo. Bestäm trådens högra fästpunkt om tråden är 1 längdenhet lång och dess lutning i en punkt (x, y) är $\sqrt{e^{2x} - 1}$.