TENTAMEN SF1622/5B1142 2/6 2010

SVAR OCH LÖSNINGSFÖRSLAG

(1.) Eftersom f är kontinuerlig antas säkert såväl ett största som minsta värde på det slutna och begränsade intervallet $[0,1]$. Detta sker i intervallets ändpunkter eller i en inre kritisk punkt (eftersom f är deriverbar)

Kritisk punkt: $f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}(1-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$, som ligger i $[0,1]$.

Vi jämför värden:

$f(0) = 0$, $f(1/2) = \frac{1}{2}e^{-2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2e}$

$f(1) = 1\cdot e^{-2} = 1/e^2$

Svar: Största värde $f(1/2) = \frac{1}{2e}$

Minsta värde $f(0) = 0$

2

a)
$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left\{ \begin{matrix} \text{Partiell Integration} & \\ U = x & V = -\cos x \\ dU = dx & dV = \sin x \, dx \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= -\pi \underbrace{\cos \pi}_{-1} + 0 + \underbrace{\left[\sin x \right]_0^{\pi}}_{=0} = \underline{\pi}$$

b)
$$\int x \sin x^2 \, dx = \left\{ \begin{matrix} \text{Substitution} \\ u = x^2 \\ \tfrac{1}{2} du = \cancel{2} x \, dx \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin u \, du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

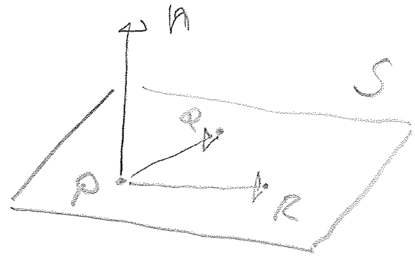
Svar: a) π

b) $-\frac{1}{2} \cos x^2 + C$, där C är en godtycklig konstant.

3. $P=(1,0,2)$, $Q=(3,3,3)$, $R=(4,-1,0)$

a) $\vec{PQ}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{PR}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$



$\vec{PQ}, \vec{PR} \parallel S \Rightarrow \bar{n}=\vec{PQ}\times\vec{PR} \perp S$

$$\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=\left((-6+1), -(-4-3), (-2-9)\right)^t$$

$$=\begin{pmatrix}-5\\7\\-11\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}5\\-7\\11\end{pmatrix}.$$ Även $-\bar{n}=\begin{pmatrix}5\\-7\\11\end{pmatrix}\perp S$

S ekvation: $\begin{pmatrix}5\\-7\\11\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\vec{OP}\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}5\\-7\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-2\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 5(x-1)-7y+11(z-2)=0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{5x-7y+11z=27}}$

b) $\text{Area}\,\triangle PQR=\frac{1}{2}\,\text{Area}(P\,Q\,R)=\frac{1}{2}\left|\vec{PQ}\times\vec{PR}\right|=$

$=\frac{1}{2}\left|(-5,7,-11)^t\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+7^2+(-11)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25+49+121}$

$=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{195}\ [\text{a.e.}]}}$

c) Linje $L\perp S \Leftrightarrow \bar{n}\ (-\bar{n})$ riktningsvektor för L

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-7\\11\end{pmatrix}}}$$

Svar:

a) $5x-7y+11z=25$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{195}$ a.e

c) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-7\\11\end{pmatrix}$

4.

Vi löser först den homogena ekv. som har karaktäristisk ekv.

$$r^2+4r+13=0 \Leftrightarrow r=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i$$

$$\Rightarrow y_h(x)=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x),\ A,B\in\mathbb{R}$$

Vi ansätter och bestämmer en partikulär lösning:

$y_p(x) \overset{\text{ANSATS}}{=} ax+b$, $y_p'=a$, $y_p''=0$ som insatt i ekv. ger

$$4a+13(ax+b)=26x-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+13b=-5 \\ 13a=26 \end{cases} \Leftrightarrow a=2,\ b=-1$$

dvs $y_p(x)=2x-1$

Vi får allmän lösning $y_g(x)=y_h(x)+y_p(x)=$

$$=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+2x-1$$

$y(0)=10 \Rightarrow 1\cdot(A\cdot 1+B\cdot 0)+2\cdot 0-1=10 \Rightarrow A=11$

så $y(x)=e^{-2x}(11\cos 3x+B\sin 3x)+2x-1$

$$\Rightarrow y'(x)=-2e^{-2x}(11\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-2x}\cdot 3(-11\sin 3x+B\cos 3x)+2$$

$y'(0)=40 \Rightarrow -2(11+B\cdot 0)+3(-11\cdot 0+B)+2=40$

$$\Leftrightarrow -22+3B=38 \Leftrightarrow 3B=60$$
$$B=20$$

SVAR: $y(x)=e^{-2x}(11\cos 3x+20\sin 3x)+2x-1$

5. Maclaurinpolynomet av grad 2 till $f(x) = \arctan 2x$ är det enda polynom $p(x)$ som uppfyller förutsättningarna.

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$f(x) = \arctan 2x \Rightarrow f(0) = 0$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 \Rightarrow f'(0) = 2$$

$\Downarrow$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot 8x}{(1+4x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

Alltså $\underline{p(x) = 2x}$ $(a=0,\ b=2,\ c=0)$

6. Under ett kort tidsintervall dt åtgår energi $dE = P(t)\,dt$

Total energi $E = \int dE = \int_0^{24} \left(1 + \cos\frac{\pi t}{12}\right) dt$

$$= \left[t + \frac{12}{\pi} \sin\frac{\pi t}{12} \right]_0^{24} = 24 + \frac{12}{\pi}\sin 2\pi - 0 - \frac{12}{\pi}\sin 0$$

$$= 24$$

Svar: 24 kWh

(7) $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ $\qquad D_h = \{x : x \neq -1\}$

- $$h'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$ dvs $h' = 0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x=-2$

Teckenstudium h'

		-2		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- $x=-2$ lok. max
- $x=0$ lok. min
- f växande på $(-\infty,-2) \cup (0,\infty)$
- f avtagande på $(-2,-1) \cup (-1,0)$

- $$h''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x+1)}(x^2+2x)}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3} \begin{cases} < 0 & x<-1 \Rightarrow f \text{ konkav } (-\infty,-1) \\ > 0 & x>-1 \Rightarrow f \text{ konvex } (-1,\infty) \end{cases}$$

- Gränsvärden & asymptoter:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \left\{ \begin{matrix} x^2+x+1 \to 1, & x\to -1^+ \\ x+1 \to 0^+, & x \to -1^+ \end{matrix} \right\} = +\infty$$

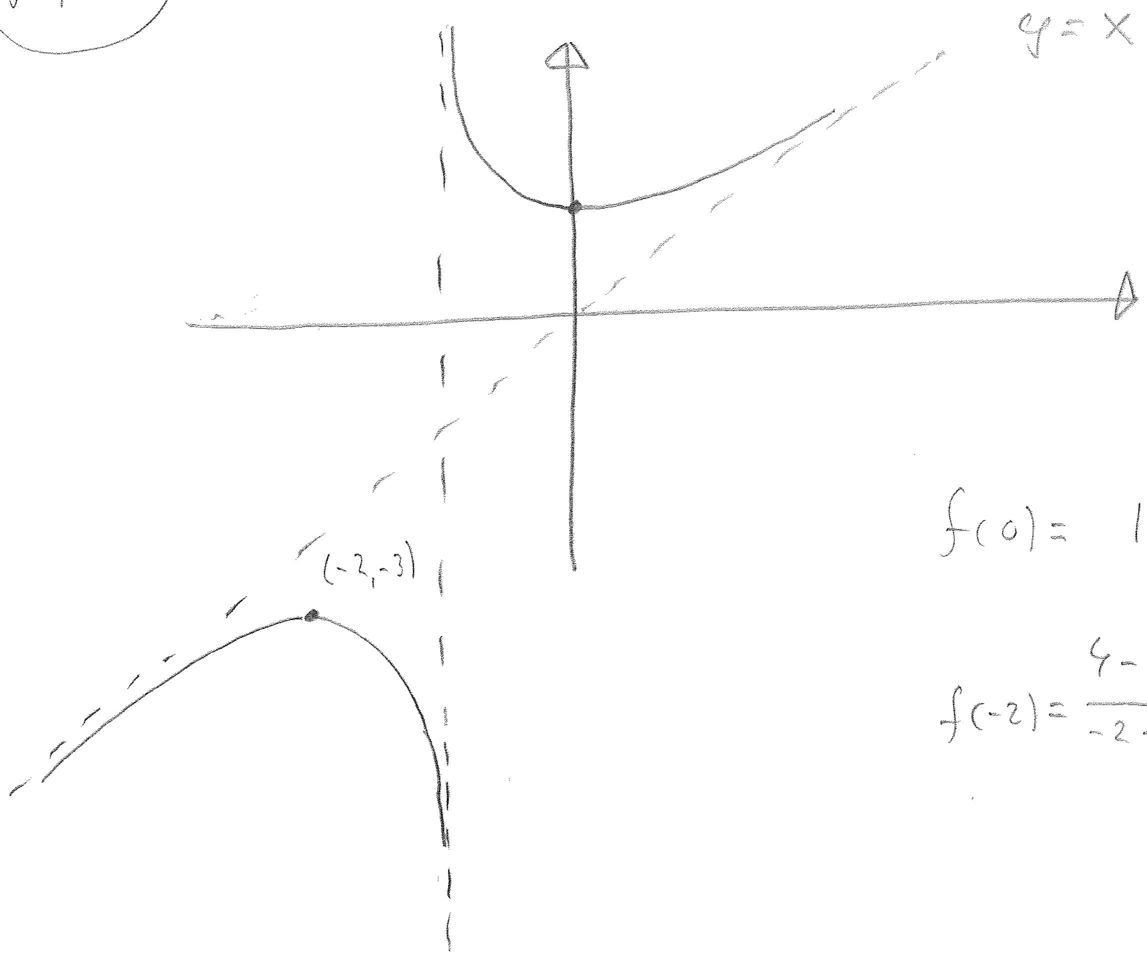
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \left\{ \begin{matrix} x^2+x+1 \to 1 & x\to -1^- \\ x+1 \to 0^- \end{matrix} \right\} = -\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ vertikal asymptot

$$h(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = x \text{ sned asymptot då } x \to \pm\infty$$

7 forts.

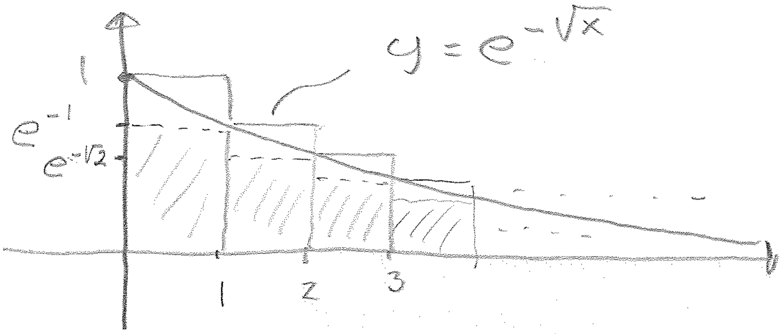
Vi sammanfattar i en skiss



$f(0) = 1$

$f(-2) = \frac{4-2+1}{-2+1} = -3$

8.



- $\sum_{1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ = Area av de (oändligt många) ////-staplarna

- $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l|l} t=\sqrt{x} & x=0 \Rightarrow t=0 \\ t^2=x & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ 2t\,dt=dx & \end{array} \right\} =$

$= 2\int_0^\infty t e^{-t}\,dt = \left[\begin{array}{ll} U=t & V=-e^{-t} \\ dU=dt & dV=e^{-t}dt \end{array} \right] =$

$= 2\left[-te^{-t}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 2\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]_0^\infty =$

$= 2\lim_{A\to\infty}\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]_0^A = 2\Big(1-\lim_{A\to\infty}\big(\underbrace{Ae^{-A}}_{\to 0}+\underbrace{e^{-A}}_{\to 0}\big)\Big) = 2$

- $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ är positiv och avtar mot 0

$\Rightarrow$ Cauchys integralkriterium ger att $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ är konvergent, eftersom $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ är konvergent.

- Ur figuren framgår $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} < \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2$

- Ur figur framgår $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} > \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2$

dvs $1+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} > 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} > 1$

Alltså $1 < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} < 2$ V.S.B.

9. a) Systemet löses med Gauss-elemination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 4 & 5 & 6 & | & 1 \\ 5 & 7 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 & -5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -6 & | & -3 \\ 0 & -3 & -6 & | & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1/3 & 2/3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x - z = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 4 & 5 & 6 & | & b \\ 5 & 7 & 9 & | & c \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 & -5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 0 & -3 & -6 & | & b-4a \\ 0 & -3 & -6 & | & c-5a \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & a \\ 0 & -3 & -6 & | & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & | & c-b-a \end{pmatrix}$$

Om $c-b-a \neq 0$ saknar systemet lösningar

om $c-b-a=0$ fås $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = -\frac{5}{3}a + \frac{2}{3}b \\ y + 2z = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b \end{cases}$$ som alltid är lösbart

med (t.ex.) $z = t$ som parameter

c) Låt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vara de punkter i $\mathbb{R}^3$ som utgör bilden av L. Dessa punkter är precis de för vilka det finns en punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s.a. $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dvs. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ som enligt b) ~~är~~ $c-b-a=0$

SVAR: a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) Lösbart omm $c-a-b=0$ c) Bilden består av alla punkter (a,b,c) s.a $c-b-a=0$

10. Betrakta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x$.

f är endast def. för $x > 0$, så frågan är om det finns något x, $0 < x < 1$ sådant att $f(x) > 1000$.

När $x \to 0+$ så $\frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$, $\ln x \to -\infty$.

Eftersom $\sqrt{x} \to 0$ "mycket fortare" än $\ln x$, verkar det troligt att $f(x) \to +\infty$, $x \to 0+$, vilket medför att $f(x) > 1000$ för alla x tillräckligt nära 0.

Mer precist:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{1 + \sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Eftersom $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x \to 0+} 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} =$

$\{t = \sqrt{x}\} = 2 \underbrace{\lim_{t \to 0+} t \ln t}_{= 0,\ \text{std. gr.vä}} = 2 \cdot 0 = 0$ gäller

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{1 + \sqrt{x}\ln x}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0+}} = +\infty, \quad \text{dvs } \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x = +\infty.$$

$\overset{\text{Enligt}}{\underset{\text{gränsvärdes def.}}{\Longrightarrow}}$ Det finns ett x_0 sådant om $0 < x < x_0$ är $\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x > 1000$.

SVAR: Ja, för alla tillräckligt små $x > 0$ är $1/\sqrt{x} + \ln x > 1000$.