KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 2/6 2010 kl 8–13
SF1622/5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 och 2 motsvaras av de två lappskrivningarna; den som är godkänd på lappskrivning n erhåller automatiskt full poäng på uppgift nr n, och skall alltså inte lösa denna uppgift vid tentamenstillfället. Uppgift 3 motsvaras av inlämningsuppgifterna under kursens gång, och den som är godkänd på detta delmoment har automatiskt full poäng på uppgift 3 och skall inte lösa denna vid tentamenstillfället.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C alt. 4, 5) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.
A och 5: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II, **B och 4:** 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II. **C och 4:** 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II. **D och 3:** 18 poäng **E och 3:** 16 poäng. **Fx** (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E)**:** 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) Har funktionen $f(x) = xe^{-2x}$ något största respektive minsta värde på intervallet $[0,1]$? Bestäm dessa i förekommande fall.

(2) a) Beräkna integralen $\int_0^\pi x \sin x \, dx$. (2p)
b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = x \sin x^2$. (2p)

(3) Ett plan S går igenom punkterna $P = (1,0,2)$, $Q = (3,3,3)$ och $R = (4,-1,0)$.
a) Bestäm en ekvation för planet S. (2p)
b) Beräkna arean av triangeln PQR. (1p)
c) Ange en ekvation för den linje som passerar genom R och är vinkelrätt mot planet S. (1p)

(4) Bestäm den funktion $y = y(x)$ som uppfyller

$$y'' + 4y' + 13y = 26x - 5, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 40.$$

(5) Bestäm talen så a, b och c sådana att polynomet $p(x) = a + bx + cx^2$ blir en bra approxiamtion till funktionen $f(x) = \arctan 2x$ för x nära 0. (Med “bra approximation” menas här att de skall gälla att $f(x) = p(x) + x^3 B(x)$, där $B(x)$ är en begränsad funktion på intervallet $[-1, 1]$.)

(6) Ett termostatstyrt elektriskt värmeelement har under ett dygn, från midnatt till midnatt, en effektförbrukning som beskrivs av funktionen

$$P(t) = \left(1 + \cos\frac{\pi t}{12}\right) \text{ [kW]},$$

där $0 \leq t \leq 24$ anger tiden i timmar. Hur mycket energi förbrukar elementet under detta dygn?

Tips: Kom ihåg att om effekten P [kW] är konstant så ges energiförbrukningen E [kWh] under tiden t [h] av $E = Pt$.

Del II

(7) Skissera grafen till funktionen

$$h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Bestäm och klassificera alla kritiska punkter och ange alla asymptoter. Ange också var funktionen är växande respektive avtagande, samt var funktionen är konvex respektive konkav.

(8) Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ är konvergent med $1 < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} < 2$.
Tips: Jämför med en lämplig integral.
Om du endast visar att serien är konvergent får du 2 p på denna uppgift.

(9) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Lös ekvationssystemet $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1 p)

b) Bestäm alla tal a, b och c sådana att ekvationssystemet
$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ är lösbart. (2p)

c) Bestäm bilden till den linjära avbildning $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. (1p)

(10) Finns det något tal $x < 1$ sådant att $\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln x > 1000$?