SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

TENTAMEN 16/12 2009 SF1622

(1.) $f(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$

Alltså gäller $f'(x) = 0$ ~~om~~ $x = \pm 1/\sqrt{2}$

Vi får följande tabell:

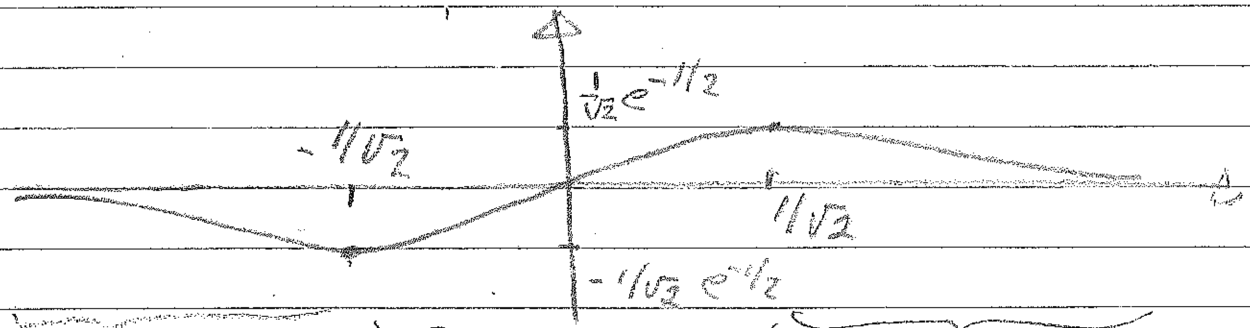
	$x = -1/\sqrt{2}$		$= 0$		$= 1/\sqrt{2}$	
$(1-2x^2)$	− − 0	+ + +	+	+ + +	0	− −
e^{-x^2}	+ + +	+ +	+	+ + +	+	+ + +
f'	− − 0	+ +	+	+ + +	0	− −
f	↘	↗		↗		↘

$f(-1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}\, e^{-1/2} = -1/\sqrt{2e}$

$f(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = 1/\sqrt{2e}$

Vidare gäller att $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$

Grafen $y = f(x)$ får följande utseende:



f avtagande och negativ (eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$) f växande f avtagande och positiv (ty $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$)

SVAR: $f(-1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ är minsta värde

$f(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ är största värde

(2.)

a) $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x & u(1) = 0 \\ du = \frac{1}{x}\,dx & u(e) = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{\ln x}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{X\to\infty} \int_*^{**} u\,du = \lim_{X\to\infty} \left[\frac{u^2}{2}\right]_*^{**} =$$

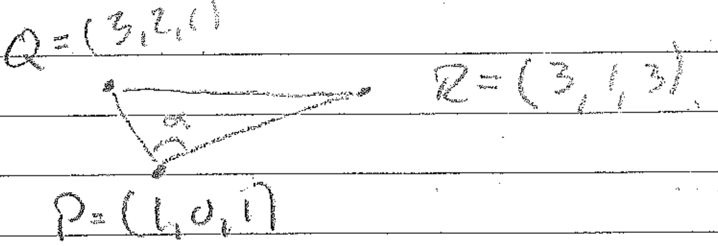
$$= \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2}\left[\left[\ln x\right]^2\right]_1^X =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{X\to\infty} \underbrace{(\ln X)^2}_{\to\infty,\ X\to\infty} - \underbrace{(\ln 1)^2}_{=0}\right) = +\infty$$

<u>Svar:</u> a) 1/2

b) Divergent

3.



a) $\bar{u} \overset{def}{=} \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{v} \overset{def}{=} \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Om α betecknar vinkeln vid $P=(1,0,1)$ är

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \frac{2\cdot 2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{9}}$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$$

b) $A = (\text{Triangelns area}) = \frac{1}{2}|\bar{u}\times\bar{v}| =$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\underset{16}{4^2}+\underset{16}{(-4)^2}+\underset{4}{(-2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3 \quad [a.e]$$

c) $\bar{n} \overset{def}{=} \bar{u}\times\bar{v}$ är normal vektor till det sökta planet. Enligt b) är

$$\bar{n} = \bar{u}\times\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

så även $(2\ -2\ -1)^t$ är normalvektor till sökt plan. $P=(1,0,1)$ är en punkt i planet. Vi får följande ekvation för planet:

$$2(x-1) - 2(y-0) - (z-1) = 0 \iff 2x-2y-z=1$$

<u>Svar:</u> a) $\frac{\pi}{4}$ b) 3 a.e. c) $2x-2y-z=1$

(4.)

$f(x) = \ln x \qquad f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2/x^3 \qquad f'''(c) = \frac{2}{c^3} \qquad (c \neq 0)$

$$f(x) \underset{\text{formel}}{\overset{\text{Taylors}}{=}} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + R_3(x)$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + R_3(x)$$

där $R_3(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3$, c mellan x och 1

$$= \frac{2}{c^3 \cdot 3!}(x-1)^3 = \frac{1}{3c^3}(x-1)^3$$

$$\ln 3/2 = f(3/2) = (3/2 - 1) - \frac{1}{2}(3/2-1)^2 + \frac{1}{3c^3}(3/2-1)^3$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3c^3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{24c^3}}_{R_3} \qquad 1 \le c \le \frac{3}{2}$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$R_3 = \frac{1}{24c^3}$, $1 \le c \le 3/2$ uppfyller

$$0 < \frac{1}{24c^3} \le \frac{1}{24}$$

<u>SVAR:</u> $\ln 3/2 \approx 3/8$

$$\frac{9}{24} = 3/8 < \ln 3/2 \le 3/8 + 1/24 = \frac{10}{24}$$

(5.) $q'' + 3q' + 2q = 5$, $q(0) = 4$, $q'(0) = -3$.

(I) Vi löser först motsvarande homogena ODE med hjälp av dess karakteristiska ekvation

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \implies r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

$$\iff r = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \implies r = -2 \lor -1$$

Alltså ges allmän homogen lösning av

$$q_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(II) Vi bestämmer nu en partikulär lösning till given ODE. Vi ser direkt att $q_p(t) = \frac{5}{2}$ är en lösning.

(III) Superposition ger allmän lösning till given ODE:

$$q_g(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t} + 5/2$$

(IV) Begynnelsevillkoren ger:

$$\begin{array}{l|l} q(0)=4 \Rightarrow \begin{cases} A + B + 5/2 = 4 & (1) \\ -2A - B = -3 & (2) \end{cases} & q_g'(t) = -2Ae^{-2t} - Be^{-t} \\ q'(0) = -3 \Rightarrow & \end{array}$$

$$\implies A = 3/2 \quad B = 0.$$

SVAR: $q(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} + 5/2$.

Vid $t=0$ är laddningen $q(0)=4$. Laddningen avtar sedan exponentiellt mot $5/2$.

6.

$$\frac{3x^2-2x+14}{(4+x^2)(1-x)} = \frac{Ax+B}{4+x^2} + \frac{C}{1-x} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(1-x) + C(4+x^2)}{(4+x^2)(1-x)} =$$

$$= \frac{Ax - Ax^2 + B - Bx + 4C + Cx^2}{(4+x^2)(1-x)} =$$

$$= \frac{(-A+C)x^2 + (A-B)x + (B+4C)}{(4+x^2)(1-x)}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} -A+C = 3 \\ A-B = -2 \\ B+4C = 14 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{array}\right) \sim$$

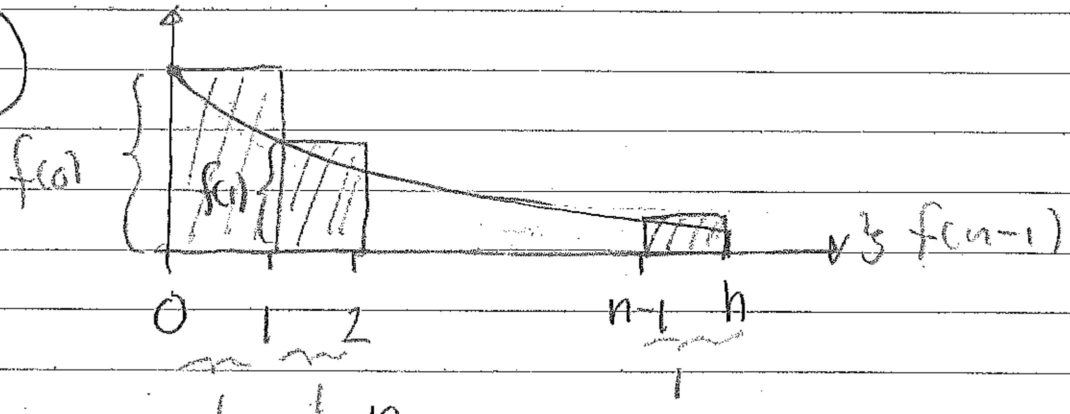
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases}$$

Alltså: $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x+14}{(4+x^2)(1-x)}\,dx = \int \frac{2}{4+x^2}\,dx + \int \frac{3}{1-x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+(x/2)^2} + 3\int \frac{dx}{1-x} =$$

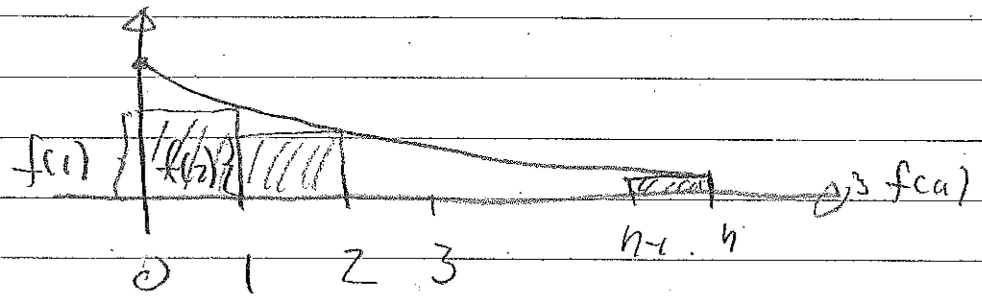
$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 3\ln|1-x| + C$$: SVAR

7



$$\Longrightarrow \int_0^n f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

$$\Longleftrightarrow f(n) + \int_0^n f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad (1)$$



$$\Longrightarrow \int_0^n f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$\Longleftrightarrow f(0) + \int_0^n f(x)\,dx \ge \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad (2)$$

(1) & (2) bevisar givet påstående

8. $L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L_2 har riktningsvektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Låt $\hat{t}$ motsv. punkt P_1 på L_1, $\hat{s}$ punkt P_2 på L_2 s.a. $P_1P_2 \perp L_1$, $\perp L_2$.

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1+\hat{s} \\ 2-\hat{s} \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{t} \\ \hat{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\hat{s}-\hat{t} \\ 2-\hat{s}-\hat{t} \\ 3-\hat{t} \end{pmatrix}$

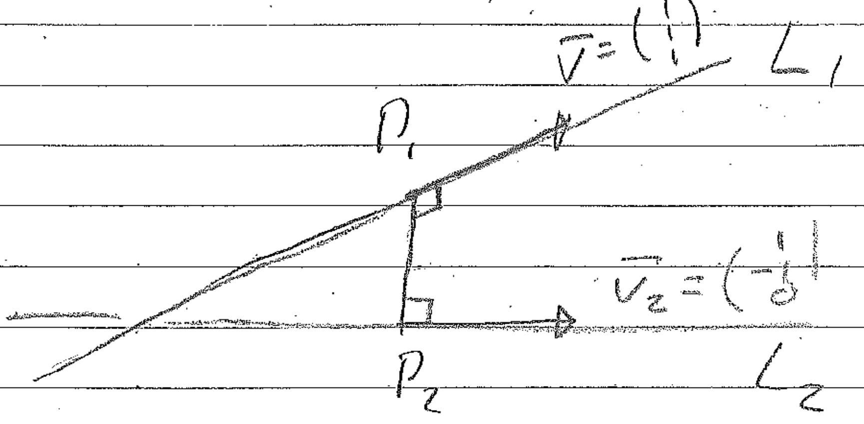
$P_1P_2 \perp L_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+\hat{s}-\hat{t}) + (2-\hat{s}-\hat{t}) + (3-\hat{t}) = 0$

$\Leftrightarrow 6 - 3\hat{t} = 0 \Leftrightarrow \hat{t} = 2$

$P_1P_2 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+\hat{s}-\hat{t}) - (2-\hat{s}-\hat{t}) = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 2\hat{s} = 0 \Leftrightarrow \hat{s} = \frac{1}{2}$

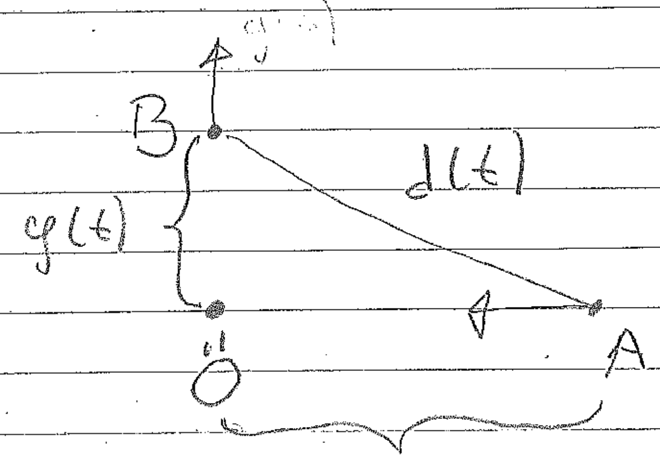
$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}-2 \\ 2-1/2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Kortaste avstånd L_1 till L_2 = $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ = $\sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (l.e)

Svar: $\sqrt{\frac{3}{2}}$ l.e.

9.



Låt $t=0$ vara den tidpunkt då A befinner sig 4 km öster om Ö.

$$x(t), \quad x(0)=4\ [km]$$

$$x'(t)=-10\ [km/h] \quad \forall t$$

(ty $x(t)$ minskar)

$$d(0)=5\ [km], \quad d'(0)=-4.4\ [km/h]$$

$$d(t)=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \quad 5=d(0)=\sqrt{4^2+[y(0)]^2} \Rightarrow y(0)=3$$

$$\text{(ii)} \quad d'(t)=\frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}\cdot\left(2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)\right)$$

$$=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}$$

$t=0$ ger $$d'(0)=\frac{x(0)x'(0)+y(0)y'(0)}{\sqrt{(x(0))^2+(y(0))^2}}$$

dvs $$-4.4=\frac{4(-10)+3y'(0)}{5} \Leftrightarrow$$

$$-22=-40+3y'(0) \Leftrightarrow y'(0)=6$$

Svar: 6 km/h

(10.) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin \pi t \, dt, \quad x \geq 0$

$f'(x) \overset{\text{Huvud}}{\underset{\text{Satsen}}{=}} e^{-x^2} \sin \pi x$

Kritiska punkter ges av $e^{-x^2} \sin \pi x = 0$

$\Leftrightarrow \sin \pi x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

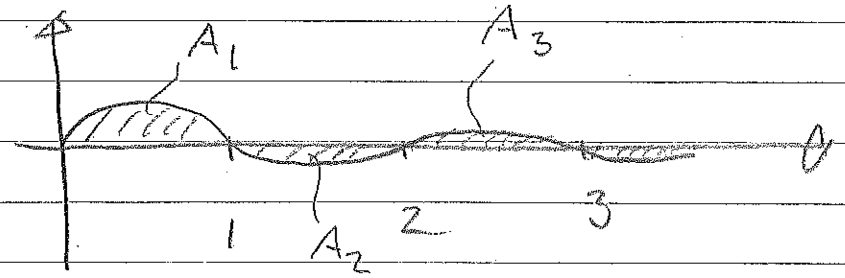
$f''(x) = -2x e^{-x^2} \sin \pi x + e^{-x^2} \cos \pi x$
$= e^{-x^2} (\cos \pi x - 2x \sin \pi x)$

Om $x = n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ gäller

$f''(n) = \underbrace{e^{-n^2}}_{>0} (\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - 2n \underbrace{\sin n\pi}_{=0}) = \begin{cases} > 0 & n \text{ jämnt} \\ < 0 & n \text{ udda} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x = 1, 3, 5, 7, \ldots$ är lokala maximipunkter
$x = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ är lokala minimipunkter

Sätt $g(t) = e^{-t^2} \sin \pi t$. Eftersom $e^{-t^2} > 0 \ \forall t$ har $g(t)$ samma tecken som $\sin \pi t$ och eftersom e^{-t^2} är strängt avtagande för $t > 0$ kommer $y = g(t)$ att se ut som $y = \sin \pi t$ med strängt avtagande amplitud. Vi får



10 forts.

Om $A_i = \int_{i-1}^{i} |g(t)|\,dt \quad i = 1,2,3,\ldots$

gäller alltså

- $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_{n-1} > A_n > \ldots$

- $f(n) = \int_0^n g(t)\,dt =$

$= A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \ldots + (-1)^{n+1} A_n$

- Eftersom $A_2 > A_3 \Rightarrow f(1) > f(3)$

$A_4 > A_5 \Rightarrow f(3) > f(5)$

osv. $\Rightarrow f(1) > f(2n+1) \quad n = 1,2,3,\ldots$
dvs. $f(1)$ största lokala extremvärdet
Vidare är $f(0) = 0 \quad f(1) > 0$

Alltså är $f(1)$ största värde

- $A_1 > A_2 \Rightarrow f(2) > 0$

$f(2) > 0,\ A_3 > A_4 \Rightarrow f(4) > 0$

osv, $f(x) > 0$
i alla lokala min pkt $x = 2,4,6,\ldots$
$\Rightarrow f(x) > 0 \ \forall \ x > 0$

$\Rightarrow f(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0$ är minsta värde.