KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 16/12 2009 kl 8–13
SF1622/5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra

Tentamen består av två delar.

Del I utgörs av sex uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 och 2 motsvaras av de två lappskrivningarna; den som är godkänd på lappskrivning n erhåller automatiskt full poäng på uppgift nr n, och skall alltså inte lösa denna uppgift vid tentamenstillfället. Uppgift 3 motsvaras av inlämningsuppgifterna under kursens gång, och den som är godkänd på detta delmoment har automatiskt full poäng på uppgift 3 och skall inte lösa denna vid tentamenstillfället.

Del II består av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. För de högre betygen (A, B, C alt. 4, 5) krävs att man löser en viss del av dessa uppgifter.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- A och 5: 31 poäng, varav minst 11 poäng från del II.
- B och 4: 26 poäng, varav minst 7 poäng från del II.
- C och 4: 21 poäng, varav minst 3 poäng från del II.
- D och 3: 18 poäng
- E och 3: 16 poäng.
- Fx (underkänt med möjlighet att komplettera till betyg E): 14 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del I

(1) Avgör om funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$ har något största respektive minsta värde på intervallet $(-\infty, \infty)$, och beräkna i förekommande fall dessa.

(2) a) Beräkna integralen $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ med hjälp av variabelsubstitutionen $u = \ln x$. (2p)

b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ är konvergent eller divergent. (2p)

(3) En triangel har sina hörn i punkterna $(1, 0, 1)$, $(3, 2, 1)$ och $(3, 1, 3)$ (ON-system).
a) Bestäm vinkeln vid hörnet $(1, 0, 1)$. (2p)
b) Beräkna triangelns area. (1p)
c) Ange ekvationen för det plan som innehåller triangeln. (1p)

(4) Beräkna ett approximativt värde till $\ln 3/2$ med hjälp av Taylorpolynomet av grad två till funktionen $f(x) = \ln x$ i punkten $x = 1$. Använd sedan resttermen i Taylors formel för att uppskatta approximationsfelets storlek.

(5) En elektrisk krets består av en kondensator, ett motstånd, en spole och en strömkälla. Laddningen över kondensatorn kommer att variera med tiden t (sekunder) och beskrivs av funktionen $q(t)$ (coulomb) som uppfyller

$$q'' + 3q' + 2q = 5, \quad q(0) = 4, \quad q'(0) = -3.$$

Bestäm $q(t)$ och beskriv också med ord hur laddningen över kondensatorn varierar för $t > 0$.

(6) Bestäm alla primitiva funktioner till $\dfrac{3x^2 - 2x + 14}{(4 + x^2)(1 - x)}$ genom att först bestämma konstanter A,B och C sådana att

$$\frac{3x^2 - 2x + 14}{(4 + x^2)(1 - x)} = \frac{Ax + B}{4 + x^2} + \frac{C}{1 - x}.$$

Del II

(7) $f(x)$ är en kontinuerlig, positiv och avtagande funktion för $x \geq 0$. Visa, t ex med hjälp av lämplig figur, att

$$f(n) + \int_0^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(x)\,dx.$$

(8) Linjen L_1 går igenom origo och punkten $(1, 1, 1)$. Linjen L_2 går igenom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 1, 3)$. Bestäm det kortaste avståndet mellan de två linjerna. (ON-system)

Tips: Finn först två punkter P_1 och P_2 på L_1 respektive L_2 sådana att vektorn från P_1 till P_2 är vinkelrätt mot de bägge linjerna.

(9) Fartyget A närmar sig en ö rakt öster ifrån med en hastighet av 10 km/h. Fartyget B rör sig samtidigt bort ifrån ön i rakt nordlig riktning. När fartyget A befinner sig 4 km ifrån ön kan man på sin radar avläsa att avståndet mellan fartygen är 5 km och minskar med en takt av 4.4 km/h. Hur fort rör sig fartyget B i detta ögonblick?

(10) Låt $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin \pi t\,dt$, $x \geq 0$. Bestäm alla lokala maxima- och minimipunkter till f. Avgör också om funktionen f har något största respektive minsta värde, och ange i sådana fall för vilka x-värden dessa antas.