KTH Matematik
Examinator Hans Thunberg

Modell-Tentamen 1 i SF1622 Envariabelanalys och linjär algebra

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, lappskrivning 1 och 2 motsvarar uppgift 1 respektive 2, inlämingsuppgifterna motsvarar uppgift 3. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte ska lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 pooäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

Tydliga och väl motiverade lösningar krävs. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = xe^{-2x}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan också samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

2. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 5x^{-3/2}$ och $y = \sqrt{x}$ samt linjen $x = 1$ roteras ett varv runt x-axeln. Ge också en förklaring till varför formeln för beräkning av en rotationsvolym ser ut som den gör.

3. A. Ange ekvationen för det plan som passerar genom punkterna $(2, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$ och $(4, 1, 1)$.
   B. Bestäm skärningspunkten mellan detta plan och linjen som passerar genom punkterna $(2, 1, 1)$ och $(4, 3, 3)$.

4. Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{(t^2)} - \cos t}{t^2}.$$

5. Lektor Hektor Vektor gillar sitt kaffe lagom varmt, dvs högst 60 grader celsius. När det kommer ur kaffeautomaten på matematikinstitutionen håller det 90 grader celsius. Efter en minut är det 88 grader celsius. Om avsvalningstakten är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan kaffet och rummet (som håller 20 grader), när kan han börja dricka?

6. A. Förklara vad som menas med att en serie är *konvergent* respektive *divergent*.
   B. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta.
$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n} \qquad (ii) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \qquad (iii) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+j^2}{j^4-2}$$

7. Man konstruerar en ränna av tre likadana plankor som är 10 cm breda. En planka ligger på marken, de båda andra har vinkel θ med horisontalen. Hur ska θ väljas för att rännan ska rymma maximal mängd vatten?

8. Låt R och S vara de linjära avbildningar av planet som i standaradbasen ges av matriserna

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A. Beskriv med ord de linjära avbildningarna R och S.
B. Finns det någon eller några punkter i planet som avbildas på sig själva av den sammansatta avbildningen $R \circ S$?

9. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \;<\; n \ln n - n + 1 \;<\; \sum_{k=2}^{n} \ln k$. Tips: betrakta integralen $\displaystyle\int_1^t \ln x \, dx$.

10. Finn ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$, $p'''(0) = f'''(0)$, där $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2+t} \, dt$. Ange sedan ett approximativt värde på $f(x) = \displaystyle\int_0^{0.1} e^{t^2+t} \, dt$ med hjälp av polynomet p.