LAPPSKRIVNING 2 25/11 SF1622 (HT-09)

SVAR OCH LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Sätt $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ på } (0,1)$$

dvs. f är strängt växande på $(0,1)$

$$\Rightarrow 0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1/2, \quad 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^1 0\, dx < \int_0^1 f(x)\, dx < \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}$$

V.S.B.

(Alt:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

eftersom $0 < \ln 2 < 1$ är

$$0 < \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx < \frac{1}{2}.$$

V.S.B.)

② a) $\int xe^{-x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} U = x & V = -e^{-x} \\ dU = dx & dV = e^{-x} \end{matrix} \right\}$

$= -xe^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx =$

$= \underline{-xe^{-x} - e^{-x} + C}$

b) $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^{X} xe^{-x}\,dx$

$\overset{\text{enl.}}{\underset{a)}{=}} \lim_{X \to +\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^{X}$

$= e^{0} - \lim_{X \to \infty} (\underbrace{xe^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}) = e^{0} = 1$

Alltså är $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$ __konvergent__

(3) (i) Vi löser först homogena ekvationen

$$y'' + 2y = 0$$

<u>Kar. ekv.</u>: $r^2 + 2 = 0 \iff r = \pm i\sqrt{2}$

ger $y_h(t) = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t$

(ii) Vi söker en partikulärlösning

<u>Ansats</u>: $y_p = ce^{-t}$, $y_p' = -ce^{-t}$, $y_p'' = ce^{-t}$

<u>Insatt i ekv</u>: $ce^{-t} + 2ce^{-t} = 6e^{-t}$

$\iff 3ce^{-t} = 6e^{-t} \iff c = 2$

så $y_p = 2e^{-t}$

(iii) Allmän lösning fås som

$$y(t) = y_h + y_p = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t + 2e^{-t}$$

(iv) Anpassning till begynnelsevillkor

$y(0) = 1$ ger: $A\cos 0 + B\sin 0 + 2 = 1$

$\Rightarrow A = -1$

$\Rightarrow y(t) = -\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t + 2e^{-t}$

$\Rightarrow y'(t) = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t + B\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t - 2e^{-t}$

$y'(0) = 0$ ger: $+B\sqrt{2} - 2 = 0 \Rightarrow B = +\sqrt{2}$

<u>SVAR</u>: $\underline{y(t) = -\cos\sqrt{2}\,t + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t + 2e^{-t}}$