Gränsvärden när x →∞

$f := x \rightarrow 1 + \frac{\sin(x)}{x};$

$$x \rightarrow 1 + \frac{\sin(x)}{x} \tag{1}$$

$g := x \rightarrow \frac{2}{\mathrm{Pi}} \cdot \arctan(x);$

$$x \rightarrow \frac{2\arctan(x)}{\pi} \tag{2}$$

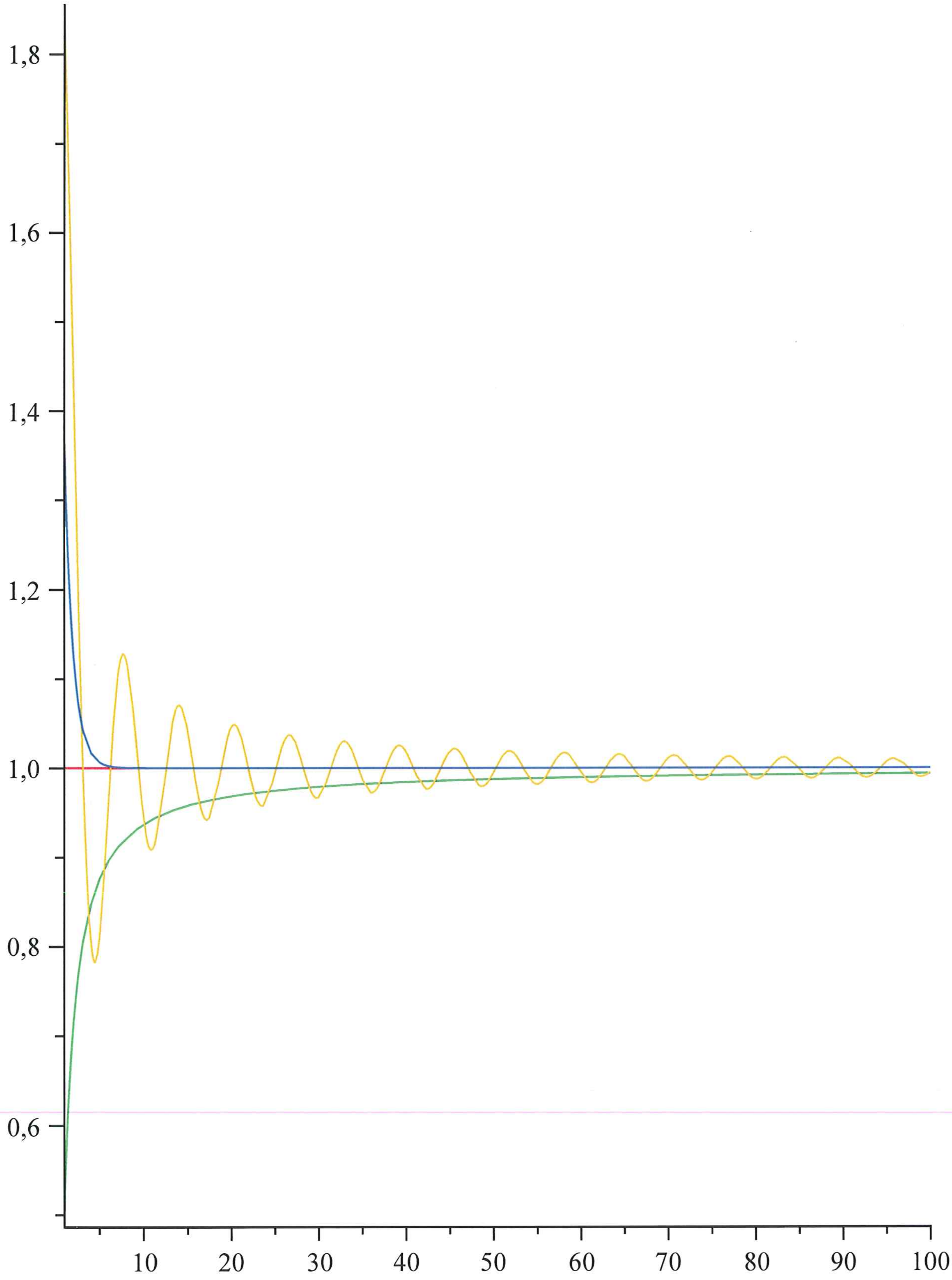
$h := x \rightarrow 1 + \left(\frac{1}{1}\right) \cdot \exp(-x);$

$$x \rightarrow 1 + \mathrm{e}^{-x} \tag{3}$$

$k := x \rightarrow 1;$

$$x \rightarrow 1 \tag{4}$$

$plot(\{f(x), g(x), h(x), k(x)\}, x = 1..100);$



För dessa tre funktioner gäller att **funktionsvärdet kan fås *godtyckligt* nära 1 för *alla tillräckligt stora x.***

Vi säger att gränsvärdet av *f(x)* när *x* går mot ∞ är lika med 1 och skriver

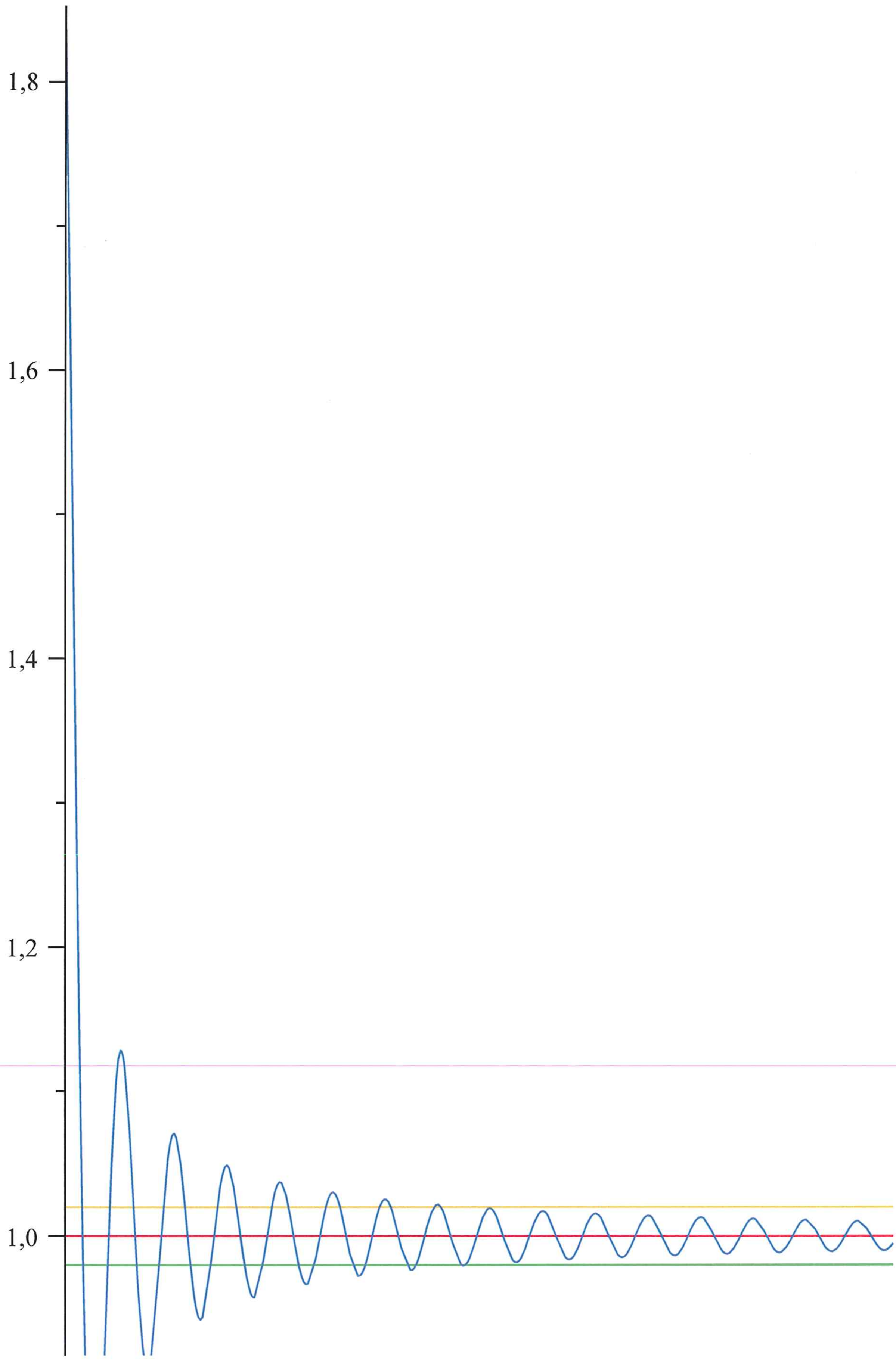
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Formell definition:

f(x) har gränsvärdet *L* när $x \to \infty$ om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett tal *R* sådant att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla $x > R$

Vi skriver $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

plot({$g(x)$, 1, 0.98, 1.02}, $x = 1..100$);



1,8
1,6
1,4
1,2
1,0

$L = 1$ är omgivet av ett ϵ-område (1-0.02, 1+0.02). För $x > 60$ ligger $f(x)$ inom detta ϵ-område.

För varje $\epsilon>0$ ligger grafen $y=f(x)$ inom ϵ-området $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ förutsatt att x är större än något lämpligt tal R.

Alltså gäller att $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

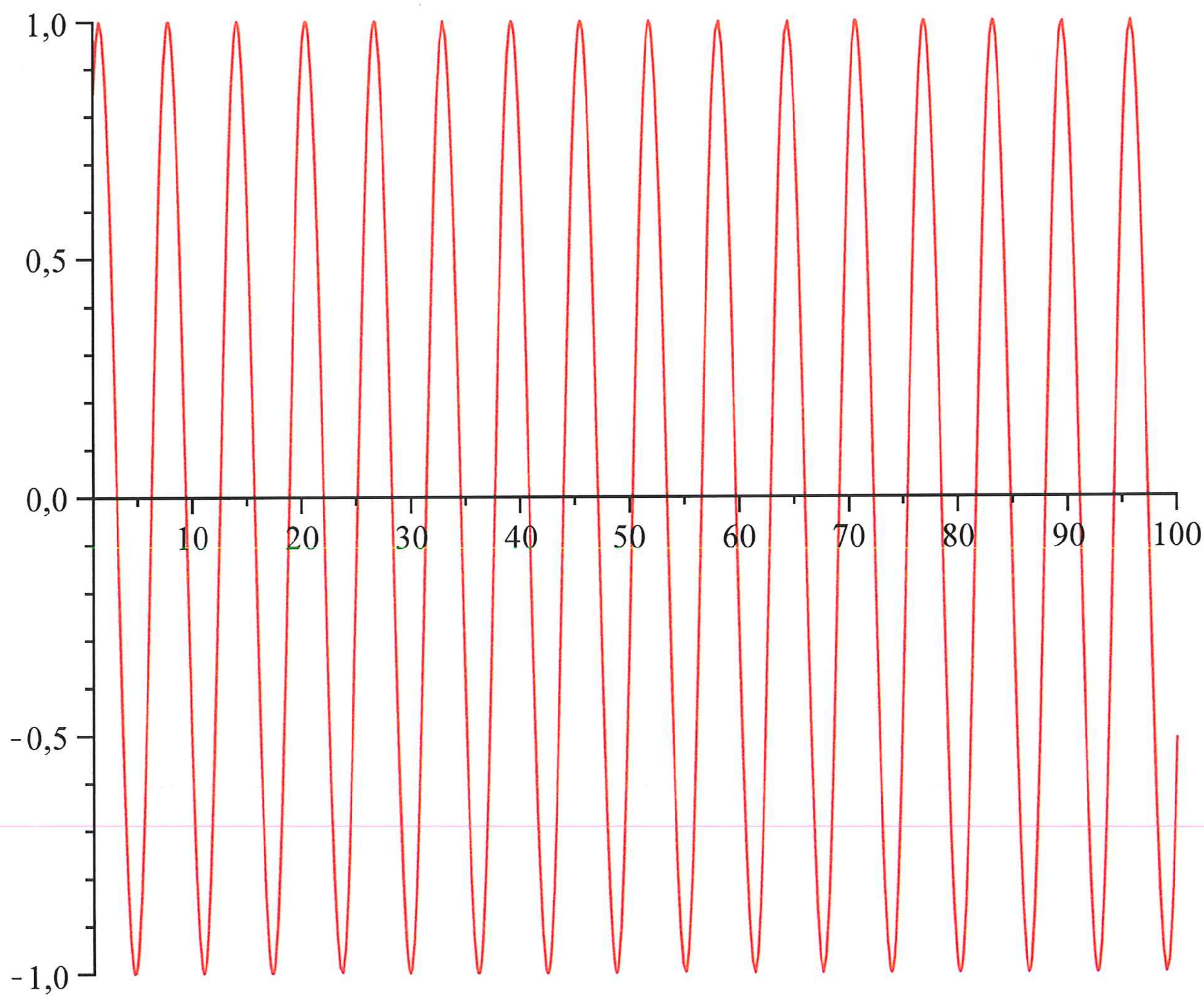
$f(x)$ är **konvergent** och **konvergerar mot** L när $x \to \infty$.

Vi verifierar detta på tavlan ....

==

$\sin(x); plot(\sin(x), x = 1 ..100);$

$\sin(x)$

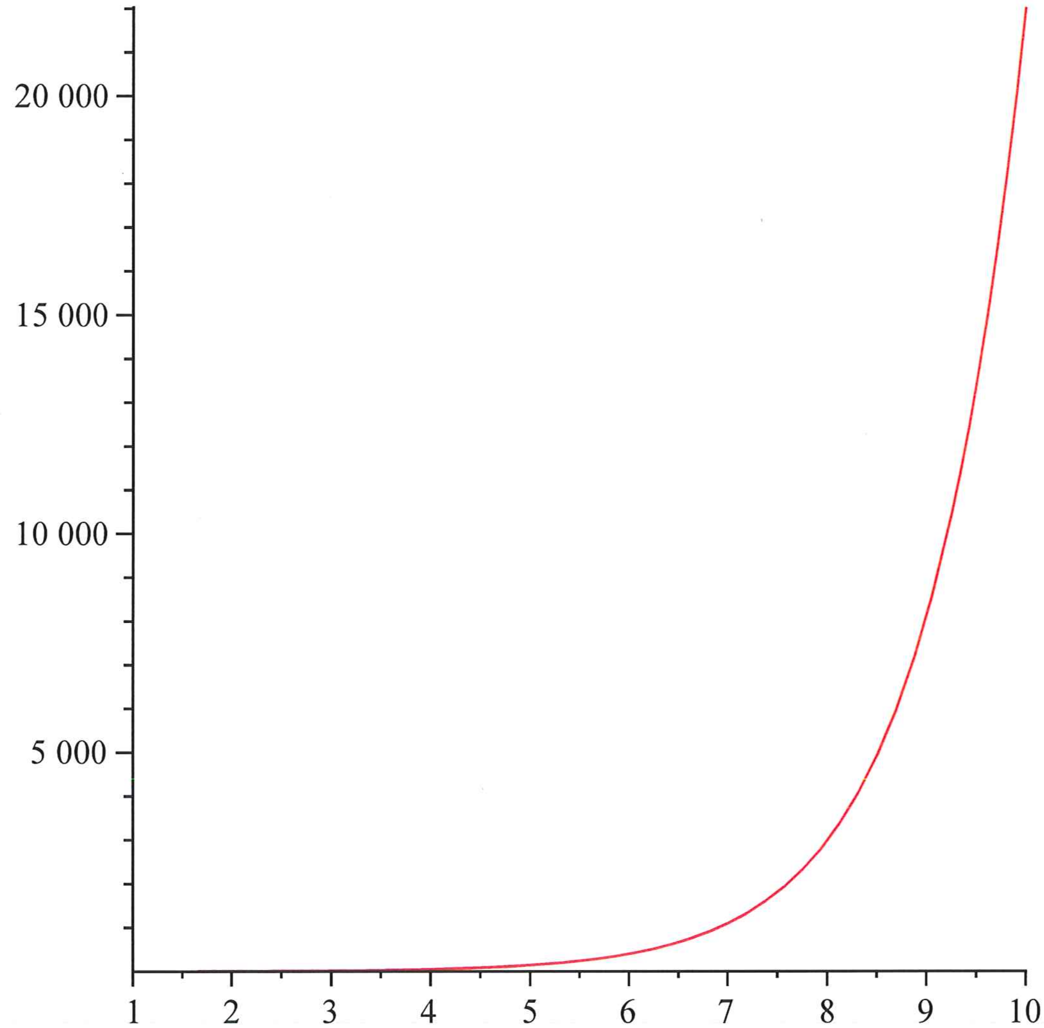


$\sin x$ saknar gränsvärde när $x \to \infty$. Funktionen sägs vara **divergent** (genom oscialltion) då $x \to \infty$.

===

$\exp(x); plot(\exp(x), x = 1 ..10);$

$$e^x$$



Exponentialfunktionen saknar gränsvärde då $x \to \infty$. Den sägs vara **divergent** med det **oegentliga gränsvärdet** $+\infty$.

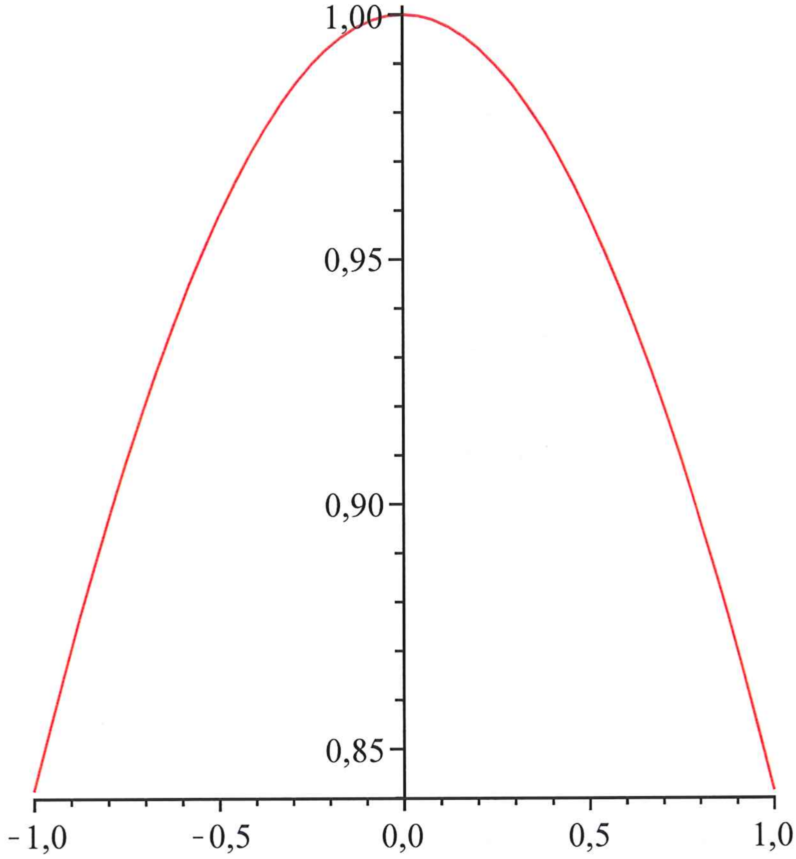
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

===

Gränsvärden när $x \to a$ (ett ändligt värde)

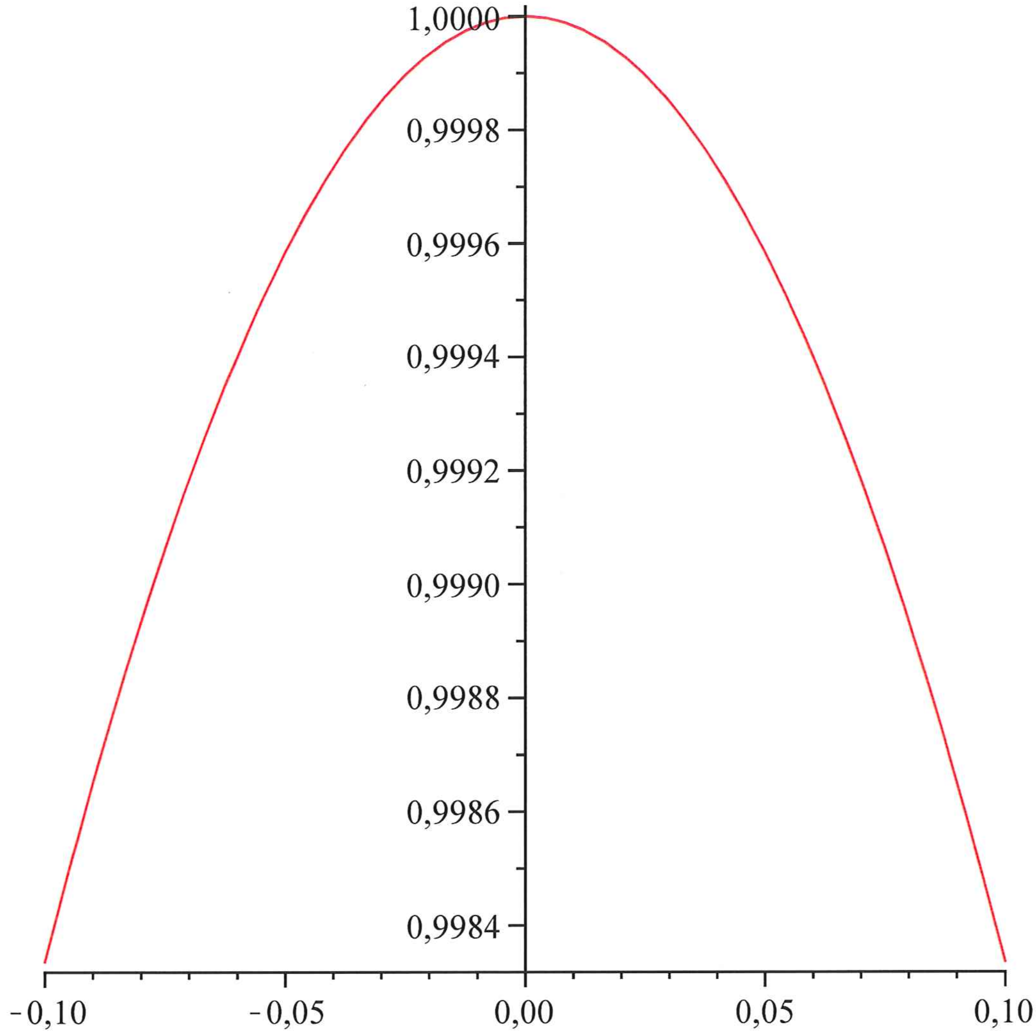
$\frac{\sin(x)}{x}$; $plot\left(\frac{\sin(x)}{x}, x=-1..1\right)$;

$$\frac{\sin(x)}{x}$$



$\frac{\sin(x)}{x}$; $plot\left(\frac{\sin(x)}{x}, x=-0.1..0.1\right)$;

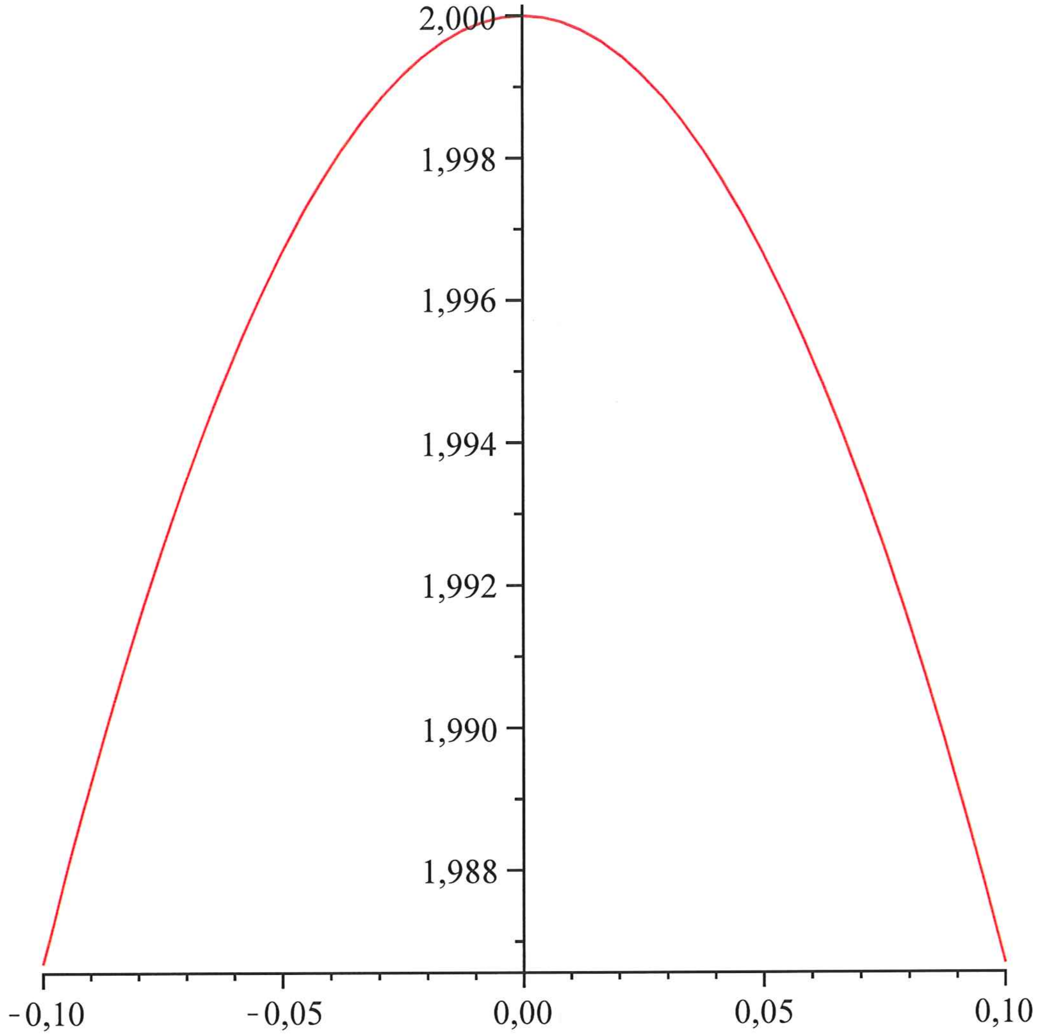
$$\frac{\sin(x)}{x}$$



Funktionen ej definerad för $x = 0$. Täljare och nämnare går mot 0 då $x \longrightarrow 0$, men kvoten tycks närma sig 1.

$\frac{\sin(2\,x)}{x}$; $plot\left(\frac{\sin(2\,x)}{x}, x = -0.1 \,..\, 0.1\right)$;

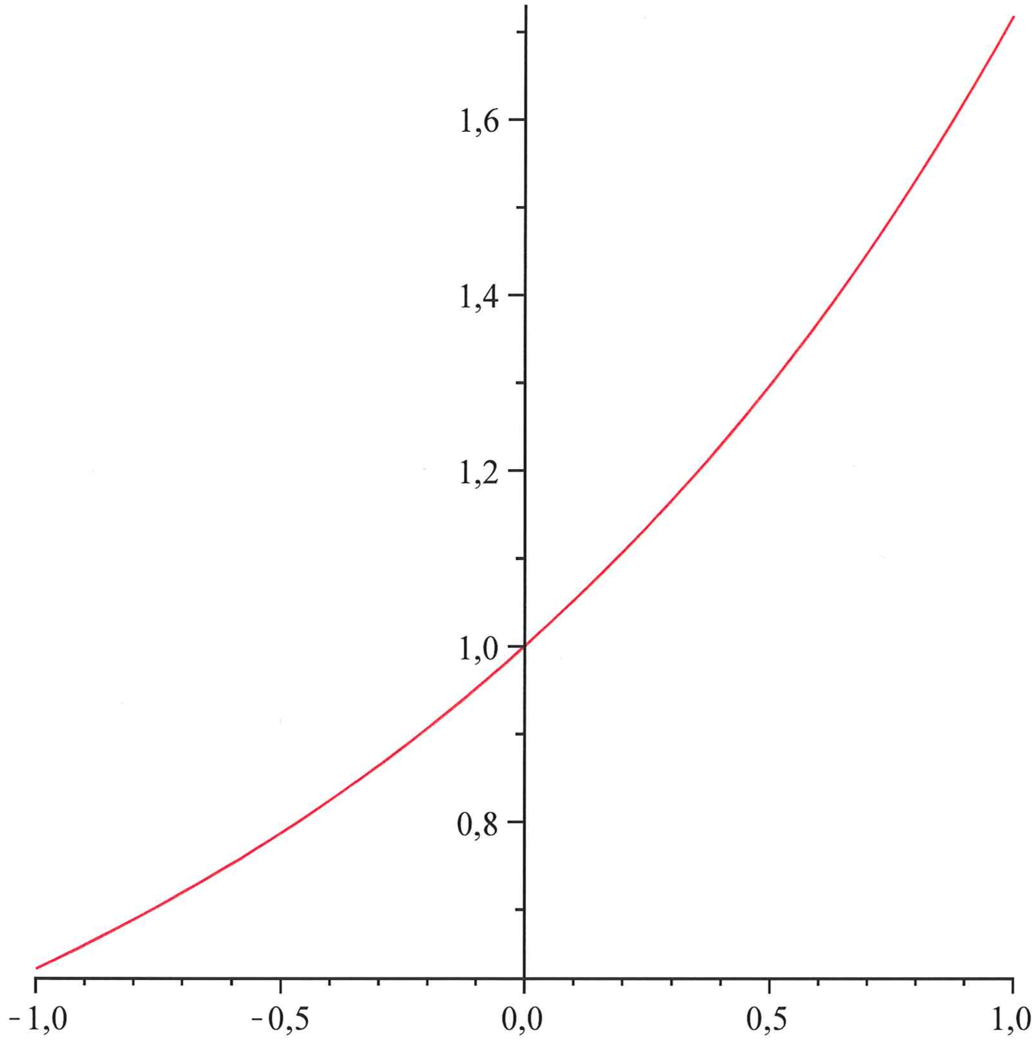
$$\frac{\sin(2\,x)}{x}$$



Funktionen ej definerad för $x = 0$. Täljare och nämnare går mot 0 då $x \to 0$, men kvoten tycks närma sig 2.

$$\frac{(\exp(x) - 1)}{x};\ plot\left(\frac{(\exp(x) - 1)}{x},\ x = -1\,..1\right);$$

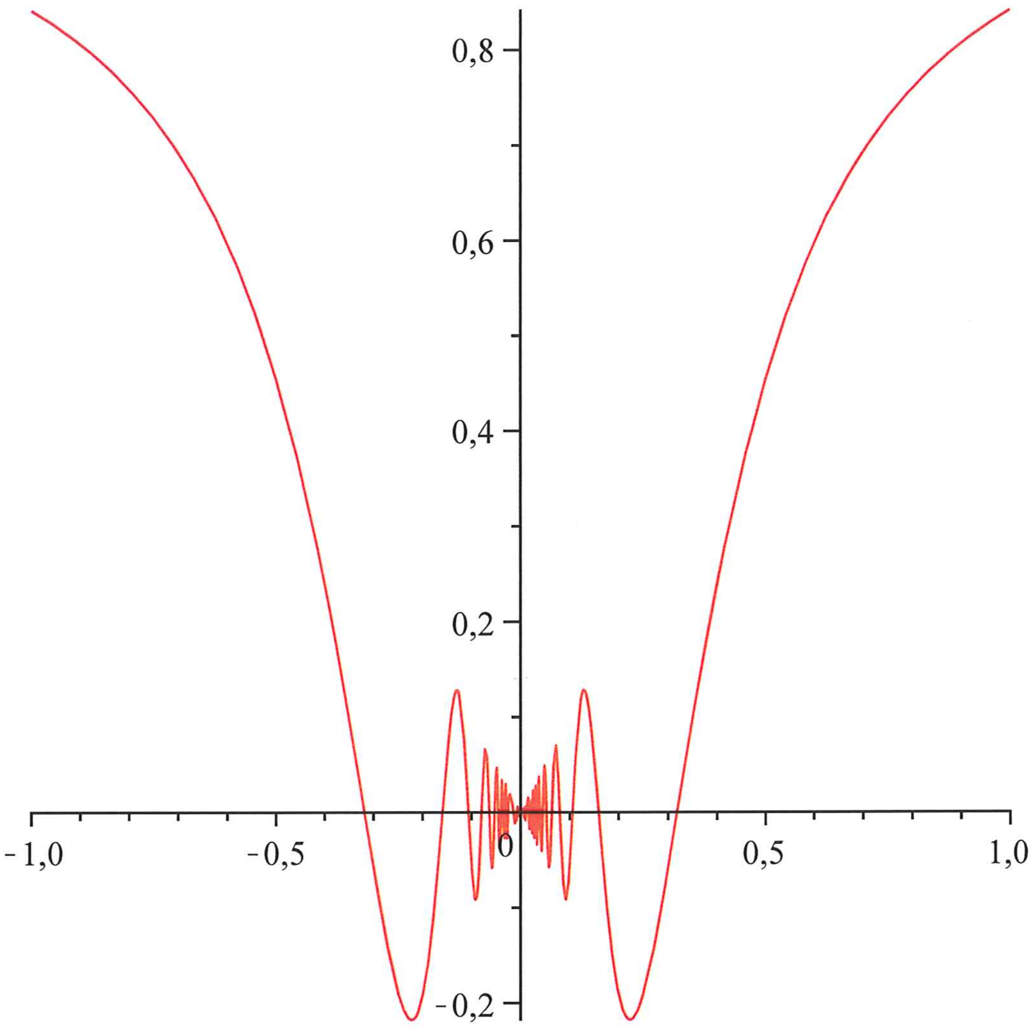
$$\frac{e^x - 1}{x}$$



Funktionen ej definerad för $x = 0$ men funktionsvärdet tycks närma sig 1 då $x \longrightarrow 0$.

$x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $plot\left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), x = -1..1\right)$;

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Funktionen ej definerad för $x = 0$ men funktionsvärdet tycks närma sig 0 då $x \longrightarrow 0$.

En funktion *f(x)* sägs ha gränsvärde *L* när $x \longrightarrow a$ om funktionsvärdet kan fås godtyckligt nära *L* för **alla** *x* i defintionsmängden som ligger tillräckligt nära *a*.

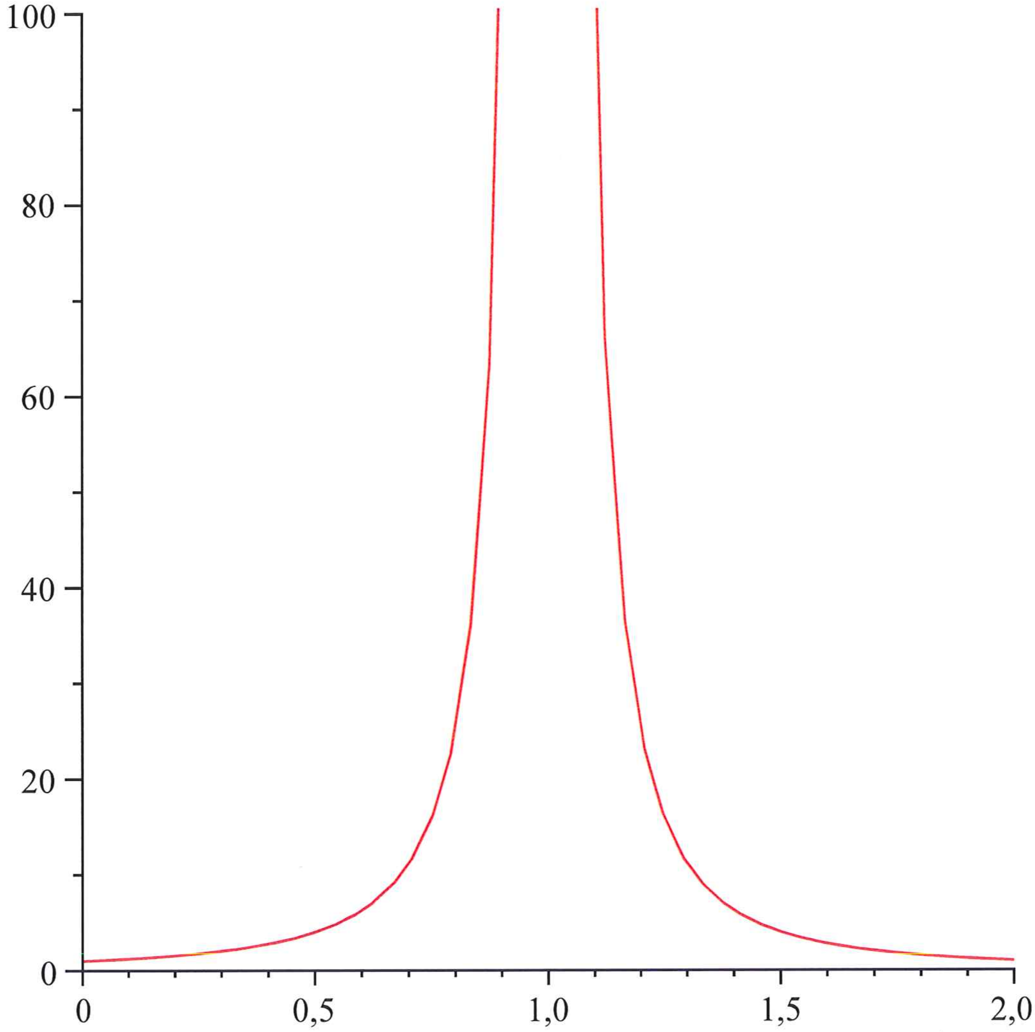
Formell defintion se sidan 134 i Person och Böiers.

Vi verifierar på tavlan att $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ....

==

$$\frac{1}{(x-1)^2};\, plot\left(\frac{1}{(x-1)^2},\, x=0.\,..2,\, y=0\,..100\right);$$

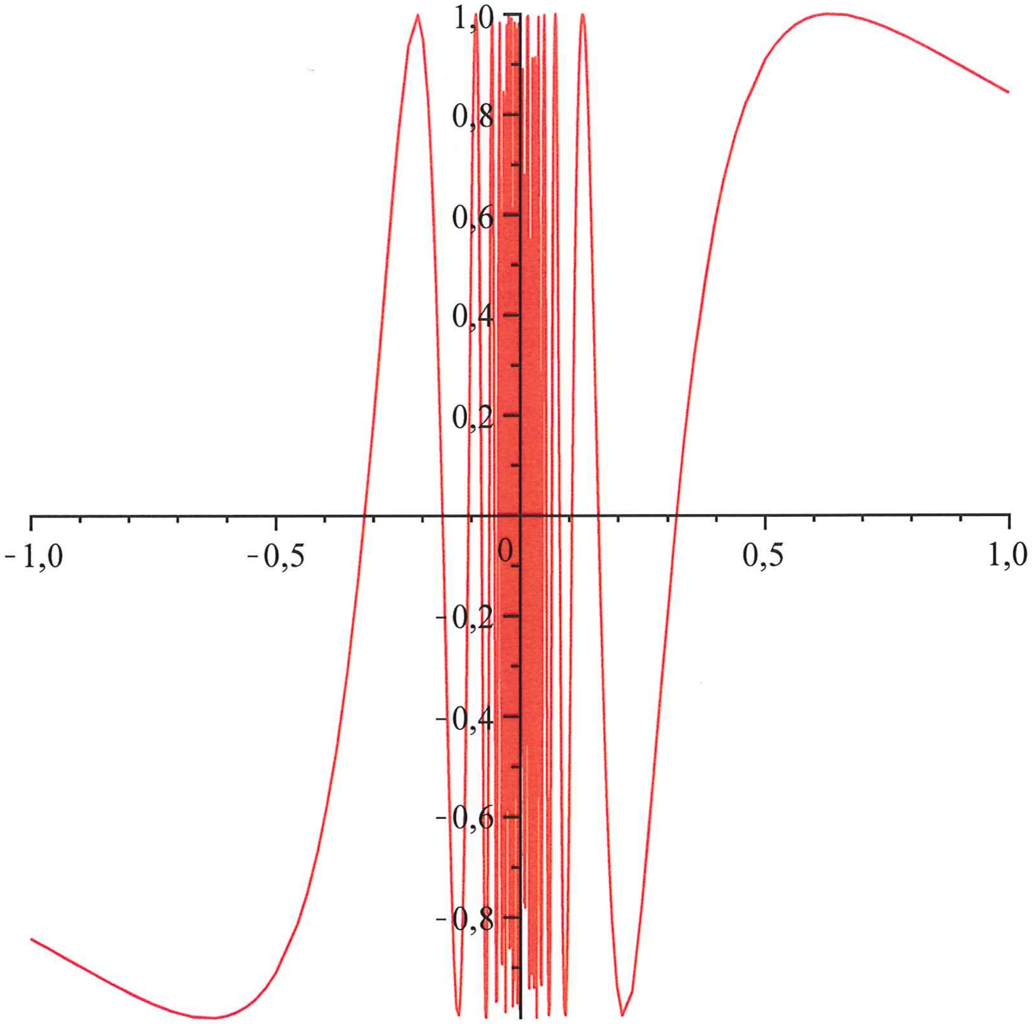
$$\frac{1}{(x-1)^2}$$



Funktionen saknar gränsvärde då $x \rightarrow 1$. Den **divergerar** mot $+\infty$ och sägs ha det oegentliga gränsvärdet $+\infty$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right);\, plot\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right),\, x=-1\,..1\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Funktionen saknar gränsvärde då $x \to 0$ och sägs vara **divergent** (genom oscillation).