KTH, Matematik

Övningar till Kapitel 5.5-5.6, 6.6 och 8.3-8.6

1. Bevisa att

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta),\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta).\end{aligned}$$

   Idé: Sammansättningen av rotation med α och rotation med β är rotationen med $\alpha+\beta$. Använd deras matrisframställningar.

2. Låt $f : U \to V$ vara en injektiv linjär avbildning mellan två vektorrum U, V. Definiera en avbildning

$$g : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow U$$

   genom $g(v) = u$ om $v \in \mathrm{Im}(f)$ är lika med $v = f(u)$, för $u \in U$. Observera att avbildningen g är väldefinierad eftersom f är injektiv (det finns bara ett u att välja så att $v = f(u)$), och bevisa att g är en linjär avbildning (som kallas för *inversen* av f).

3. Vilken av följande linjära avbidningar är injektiv, surjektiv, bijektiv?
   (a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (x, y+z, t)$,
   (b) $f : P_3 \to \mathbb{R}^4$, $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 - a_2, a_1 + a_2, a_0 - a_2, a_1 - a_2)$,
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y, z, x)$,
   (d) $f : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^5$,

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, a+c, a+d, b+c, b+d).$$

4. Låt A beteckna den linjära avbildningen från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som består av först en spegling i planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och därefter en projektion på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. (a) Bestäm matrisen för denna linjära avbildning relativt standardbasen. (b) Bestäm avbildningens bildrum och nollrum.

5. Betrakta den linjära funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierad av

$$f(x, y, z) = (x - z, z - x, x - y).$$

   (a) Bestäm matrisen $(f)_B$ av f relativ den standarda basen $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. (b) Låt B' vara basen $B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. Bestäm basbytesmatrisen från B till B' och från B' till B. (c) Bestäm matrisen $(f)_{B'}$ av f relativ basen B'.

6. Om den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vet man att $f(1, 2, -1) = (2, 2, 1)$, $f(0, 1, 3) = (2, 1, 1)$ och $f(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$. Bestäm den inversa avbildningens matris relativt standardbasen.

7. Visa att avbildningen $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ definierad av

$$T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2))$$

   (a) är linjär, (b) är bijektiv, och (c) hitta inversen av T. (d) Hur kan man tolka denna isomorfi?

8. (Detta är övningarna 6.6.14, 6.6.15, 6.6.16.) Låt A vara en ortogonal matris av typ 2×2. (a) Visa att A måste vara en av

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(b) Visa att multiplikation med A,

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & v & \longmapsto & Av, \end{array}$$

är antingen en rotation eller en rotation följd av en spegling kring x-axeln.
(c) Visa att om $\det(A) = 1$, då är T_A en rotation och om $\det(A) = -1$, då är T_A en rotation följd av en spegling kring x-axeln.
(d) Bestäm om de ortogonala matriser

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

är rotationer eller rotationer följd av en spegling kring x-axeln och bestäm rotationsvinkeln.

9. Låt A vara följande 4×4 matris och b vara följande vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Hitta (a) en partikulär lösning till $Ax = b$, (b) en allmänna lösning till $Ax = 0$ och (c) en allmänna lösning till $Ax = b$. (d) För vilken (kolon-)vektor $c \in \mathbb{R}^4$ har $Ax = c$ minst en lösning?