KTH, Matematik

Övningar till Kapitel 4.2-4.3 och 8.1-8.2

1. Bevisa att sammansättningen av två linjära avbildningar är igen en linjär avbildning.
2. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen
$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3).$$
(a) Visa att f är en linjär avbildning.
(b) Vad är matrisframställningen av f (relativt standard baserna av $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^2$)?
3. Hitta matrisframställningen av rotation (kring origo) med 60° i $\mathbb{R}^2$ och använd detta för att hitta bilden av vektorn $(1, -1)$.
4. Visa att en rotation (kring origo) i $\mathbb{R}^2$ har matrisframställning
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
för $a, b \in \mathbb{R}$ med $a^2 + b^2 = 1$.
5. Bestäm bilden av punkten $P = (3, -2, 2)$ efter rotation 90° kring linjen genom origo och punkten $Q = (1, 2, 2)$.
6. Ge matrisframställningen av linjära avbildningen f av $\mathbb{R}^3$ som är sammansättningen av rotationen R med 180° kring y-axeln och ortogonala projektionen p på xz-planet. (Alltså är $f = R \circ p$. Vi utför först p, och sedan R.) Kontrollera att
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Rank}(f).$$
7. För en linjär avbildning $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller att $A(1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $A(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ och $A(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
(a) Bestäm $A(2, 1, 0)$.
(b) Bestäm A:s kärna.
(c) Bestäm A:s bildrum.
(d) Bestäm A:s matrisframställning.
(e) Kontrollera att $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Rank}(A)$.
8. Låt $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonala projektionen på xy-planet. Visa att $p \circ p = p$.
9. Låt $f : P_n \to P_n$ vara avbildningen
$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}.$$
(a) Visa att f är en linjär avbildning.
(b) Vilka av följande är i $\mathrm{Ker}(f)$?
$$(i)\ x^2, \quad (ii)\ 2.$$
(c) Vilka av följande är i $\mathrm{Im}(f)$?
$$(i)\ x^2, \quad (ii)\ 2 + x^n.$$
(d) Kontrollera att
$$\dim(P_n) = \dim\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Rank}(f).$$
(e) Känner du igen f?