

## Övningar till Kapitel 7

1. Till var och en av följande matriser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 14 & -15 & 6 \\ 18 & -24 & 11 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- (a) hitta karaktäristiska polynomet,  
 (b) hitta egenvärdena,  
 (c) hitta egenrum motsvarande varje egenvärde.
2. Varför har en rotationsmatris (i planet) med vinkel olik  $0^\circ$  och  $180^\circ$  inga egenvärden och inga egenvektorer?
3. För matriserna i övning 1:  
 (a) hitta den algebraiska och geometriska multipliciteten av varje egenvärde,  
 (b) bestäm om matrisen är diagonaliserbar,  
 (c) om matrisen är diagonaliserbar, hitta  $P$  och diagonalmatris  $D$  så att  $PDP^{-1}$  är lika med matrisen.

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna  $A^{10}$ .

5. För varje av följande symmetriska matriser  $S$ , hitta en ortogonal matris  $P$  så att  $P^{-1}SP$  är diagonal.

$$(a) S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, (b) S = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}, (c) S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Hitta en  $3 \times 3$  matris med egenvärde  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$  och  $\lambda_3 = 7$  och tillhörande egenvektorer

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. En symmetrisk  $3 \times 3$  matris  $A$  har karaktäristiskt polynom  $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$ , och alltså egenvärdena  $-1$  och  $1$ . En egenvektor hörande till egenvärdet  $1$  är

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen  $A$ .