KTH, Matematik

Övningar till Kapitel 6.1-6.5

1. (a) Visa att
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 4x_2y_2$$
definiera en inreprodukt på $\mathbb{R}^2$.
(b) Visa att
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$
inte definiera en inreprodukt på $\mathbb{R}^2$.

2. Visa att likhet gäller i Cauchy-Schwarz olikhet
$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$
om och endast om u och v är linjärt beroende.

3. Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ vara delrummet
$$U = \{t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\} .$$
Bestäm orthogonala komplementet $U^\perp$ relativ inreprodukten
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 4x_2y_2.$$

4. Låt $V \subset \mathbb{R}^4$ vara delrummet
$$V = \operatorname{Span}\{(1,1,2,3), (1,1,1,1)\} .$$
Bestäm orthogonala komplementet $V^\perp$ relativ standard skalärprodukten på $\mathbb{R}^4$ och hitta en bas för $V^\perp$.

5. Kolla att vektorer $v_1 = (-3/5, 4/5, 0)$, $v_2 = (4/5, 3/5, 0)$, $v_3 = (0,0,1)$ bildar en orthonormal bas för $\mathbb{R}^3$ och uttrycker $(1,-1,2)$ och $(3,-7,4)$ som linjärkombination av v_1, v_2, v_3.

6. Betrakta $\mathbb{R}^3$ med den standard skalärprodukt. Använd Gram-Schmidt prozess för att transfomera basen $\{u_1, u_2, u_3\}$ i ett orthonormal bas:
(i) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$, $u_3 = (1,2,1)$,
(ii) $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (3,7,-2)$, $u_3 = (0,4,1)$.

7. Hitta minsta kvadrat lösning till
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. Bestäm orthogonala projektion av $(2,1,3)$ på delrummet $\operatorname{Span}\{(1,1,0), (1,2,1)\}$ av $\mathbb{R}^3$.

9. (a) Hitta koordinater av $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ relativ basen $\{(2,-4), (3,8)\}$.
(b) Hitta koordinater av polynomen $2-x+x^2$ i P_2 relativ basen $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.