KTH, Matematik

Övningar till Kapitel 5.1 till 5.4

1. Bevisa att mängden $P_1 = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ av polynom av grad högst 1, med addition
$$(a_0 + a_1 x) + (b_0 + b_1 x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$$
och multiplikation med reella tal λ
$$\lambda(a_0 + a_1 x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x,$$
är ett vektorrum.

2. Bestäm om mängden av alla par av reella tal $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ med addition
$$(x, y) + (x' + y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$$
och multiplikation med reella tal λ
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$
är ett vektorrum.

3. Bestäm om följande delmängder av $M_{22} = \{\text{reella matriser av typ } 2 \times 2\}$ är delrum till M_{22}:
$$(a)\ U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$(b)\ V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Bestäm om följande mängder av vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende, spänner $\mathbb{R}^3$, eller/och är baser av $\mathbb{R}^3$:
(i) $S = \{(1, 2, 3), (5, 1, 3)\}$,
(ii) $S = \{(1, 2, 3), (5, 1, 3), (1, -1, -1)\}$,
(iii) $S = \{(1, 2, 3), (5, 1, 3), (1, -1, -1), (1, 1, 0)\}$,
(iv) $S = \{(1, 2, 3), (5, 1, 3), (1, 1, 0)\}$.

5. Visa att de vektorer (x_1, x_2, x_3, x_4) i $\mathbb{R}^4$ som satisfierar ekvationen
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$
bildar ett delrum till $\mathbb{R}^4$. Bestäm en bas för detta delrum och ange dess dimension.

6. Undersök om det finns några värden på talet a för vilka de fyra vektorerna $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 0, -1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$ och $(2, a, a, 2a)$ blir linjärt oberoende i $\mathbb{R}^4$.

7. Visa att vektorerna $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$ och $(1, -1, -1, 1)$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$ och bestäm sedan koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i denna bas.

8. Visa att $\{1, t, t^2, t^3\}$ är en bas för rummet P_3 av alla (reella) polynom av grad högst tre. Rummet P_3 har därmed dimension 4 (= antal element i en bas). Komplettera polynomen $1 - t^2$, $2t - t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ med ett polynom så att en (annan) bas för P_3 erhålles.