KTH, Matematik

Lösning till lappskrivning 5, rosa version, Linjär algebra SF1604, CDATE1, 4/12 2008

1. Hitta egenvärdena och egenrum motsvarande varje egenvärde till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Karkteristiska polynomet av A är

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = (\lambda + 3)\left[\lambda(\lambda - 4) - 4(-1)\right] \\ &= (\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda + 3)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Egenvärdena av A är nollställen till karakteristiska poynomet, alltså har A egenvärden -3 och 2.
Egenrum E_{-3} motsvarande egenvärde -3 är

$$E_{-3} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(Om man inte ser det på en gång, kan man hitta E_{-3} som lösningrummet till $(-3I_3 - A)v = 0$.) Egenrum E_2 motsvarande egenvärde 2 är lösningrummet till $(2I_3 - A)v = 0$. Vi löser det genom Gauss elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

så att

$$E_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Låt $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den ortogonala projektion på linjen

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 2x + y = 0 \right\}.$$

a) Hitta en bas B av $\mathbb{R}^2$ så att matrisframställningen av p relativt basen B är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vektorn

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ligger på linjen ℓ och därför är $p(v_1) = v_1$. Vektorn

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är ortogonal till ℓ och därför är $p(v_2) = 0$. Matrisframställningen av p relativt basen $B = \{v_1, v_2\}$ är alltså

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Hitta matrisframställningen av p relativt standard basen.
Lösning: Basbytematrisen från basen B till standardbasen är lika med

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basbytematrisen från standardbasen till basen B är därmed lika med

$$Q^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed är matrisframställningen av p relativt standard basen lika med

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$