KTH, Matematik

Lösning till lappskrivning 4, rosa version, Linjär algebra SF1604, CDATE1, 6/11 2008

1. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen

$$f(x, y, z) = (x + y, x - z, y + z).$$

Bestäm matrisframställningen av f, en bas för kärnan av f och en bas för bildrummet av f.
Lösning: Matrisframställning av f är

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kärnan av f består av alla vektorer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ så att $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, alltså så att

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x - z &= 0, \\ y + z &= 0. \end{aligned}$$

Man löser detta t. ex. med hjälp av Gauss elimination och få att $(x, y, z) = (t, -t, t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Kärnan av f är alltså lik

$$\mathrm{Ker}(f) = \{t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

och en bas för $\mathrm{Ker}(f)$ är $\{(1, -1, 1)\}$. Bilden av f är lika med kolonrummet av matrisframställningen av f, alltså lika med

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 1)\}.$$

Då

$$(0, -1, 1) = -(1, 1, 0) + (1, 0, 1)$$

är

$$\mathrm{Span}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 1)\} = \mathrm{Span}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\},$$

och de två linjära oberoende vektorer $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$ bildar alltså en bas för $\mathrm{Im}(f)$.

2. Använd Gram-Schmidt prozess för att transfomera basen $\{u_1, u_2, u_3\}$ till en ortonormal bas:
$$u_1 = (2, 0, 2, 1), \quad u_2 = (2, 1, -2, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Lösning: Första vektorn u_1 har inte norm 1, så vi normaliserar u_1 till

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2, 0, 2, 1) = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Då $\langle v_1, u_2 \rangle = 0$ är vektorn u_2 redan ortogonal till v_1 (och till u_1), så vi behöver bara normalisera den till

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2, 1, -2, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right).$$

Vektorn $\overline{v}_3$, ortogonal till v_1 och v_2, och i rummet som spänns av u_1, u_2 och u_3 erhålls, enligt Gram-Schmidt, som

$$\begin{aligned}
\overline{v}_3 &= u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle\, v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle\, v_2 = (0, 0, 1, 0) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) \\
&= \left(0, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right),
\end{aligned}$$

som vi normaliserar till

$$v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Den sökta ortonormala basen är $\{v_1, v_2, v_3\}$.