KTH, Matematik

Lösning till lappskrivning 3, gul version, Linjär algebra SF1604, CDATE1

1. Visa att vektorerna $(1,1,1)$, $(1,2,2)$ och $(1,2,3)$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ och bestäm sedan koordinaterna för vektorn $(1,0,0)$ i denna bas.
   Lösning: Vektorerna $(1,1,1)$, $(1,2,2)$ och $(1,2,3)$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ då
   $$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$
   Då den linjära ekvationssystemet
   $$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,2) + \lambda_3(1,2,3) = (1,0,0)$$
   har lösning $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, är koordinaterna för $(1,0,0)$ i basen $\{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$ lika med $(2,-1,0)$.
2. Låt $V \subset \mathbb{R}^4$ vara delrummet
   $$V = \operatorname{Span}\{(2,2,1,1),(6,4,3,1)\}.$$
   Bestäm orthogonala komplementet $V^\perp$ relativ standard skalärprodukten på $\mathbb{R}^4$ och hitta en bas för $V^\perp$.
   Lösning: Då V är lika med radrummet av matrisen
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
   är $V^\perp$ lika med nollrummet av A (se Sats 6.2.6). Vi använder Gauss-Jordan elimination för att lösa $Ax = 0$:
   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
   $$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$
   Nollrummet av A, och därmed också $V^\perp$, består av vektorerna $((1/2)\cdot(t-s), -t, s, t)$, för $s,t \in \mathbb{R}$. Alltså
   $$V^\perp = \{t(1/2,-1,0,1) + s(-1/2,0,1,0) \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$
   Vektorerna $(1/2,-1,0,1)$ och $(-1/2,0,1,0)$ spänner $V^\perp$ och de är linjärt oberoende eftersom de inte ligger på samma linje. Alltså är $\{(1/2,-1,0,1),(-1/2,0,1,0)\}$ en bas för $V^\perp$.