KTH, Matematik

Övningar till Kapitel 5.5-5.6, 6.6 och 8.3-8.6

1. Matrisframställningen A_γ av en rotation $R_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med vinkeln γ är

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Då $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha \circ R_\beta$, är matrisen

$$A_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

lika med produkten

$$\begin{aligned} A_\alpha \cdot A_\beta &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

som visar att

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

2. Låt $f : U \to V$ vara en injektiv linjär avbildning mellan två vektorrum U, V. Definiera en avbildning

$$g : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow U$$

genom $g(v) = u$ om $v \in \mathrm{Im}(f)$ är lika med $v = f(u)$, för $u \in U$. Observera att avbildningen g är väldefinierad eftersom f är injektiv (dvs det finns bara ett u att välja så att $v = f(u)$), och bevisa att g är en linjär avbildning (som kallas för *inversen* av f).
Lösning: Vi måste visa att (1) $g(v_1+v_2) = g(v_1)+g(v_2)$ och att (2) $g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Låt $u_1, u_2 \in U$ vara så att $f(u_1) = v_1$ och $f(u_2) = v_2$. Då är

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2,$$

som implicerar att

$$g(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = g(v_1) + g(v_2).$$

(2) Låt $u \in U$ vara så att $f(u) = v$. Då är

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v,$$

som implicerar att

$$g(\lambda v) = \lambda u = \lambda g(v).$$

3. Vilken av följande linjära avbidningar är injektiv, surjektiv, bijektiv?
(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (x, y + z, t)$,
(b) $f : P_3 \to \mathbb{R}^4$, $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_0 - a_2, a_1 + a_2, a_0 - a_2, a_1 - a_2)$,
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y, z, x)$,
(d) $f : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^5$,

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, a + c, a + d, b + c, b + d).$$

Lösning: (a) f kan inte vara injektiv då $4 > 3$. Det kan man också se från att $f(0, 1, -1, 0) = (0, 0, 0)$. Avbildningen f är surjektiv då varje $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ är i bilden av f: $f(a, b, 0, c) = (a, b, c)$. Då f inte är injektiv kan den inte vara bijektiv. (b) f är inte injektiv då $f(x^3) = (0, 0, 0, 0)$. f är inte surjektiv då $(1, 0, 0, 0)$ inte ligger i $\mathrm{Im}(f)$: Om $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (1, 0, 0, 0)$, då är $(1, 0, 0, 0) = (a_0 - a_2, a_1 + a_2, a_0 - a_2, a_1 - a_2)$, och från första koordinat får man $1 = a_0 - a_2$, men från andra koordinat får man $0 = a_0 - a_2$, som är omöjligt. Då f varken är injektiv eller surjektiv kan den inte vara bijektiv. (c) f är injektiv, surjektiv och bijektiv. (d) f kan inte vara surjektiv då $\dim(M_{2\times 2}) = 4 < \dim(\mathbb{R}^5) = 5$. Avbildningen f är injektiv. Antar att

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, a + c, a + d, b + c, b + d) = (0, 0, 0, 0, 0),$$

följer $a = -b$, $a = -c$, $a = -d$, $b = -c$, $b = -d$. Från de två första ekvationer får vi $b = c$, men från tredje ekvationen gäller $b = -c$, och alltså $b = c = 0$. Och det följer att också $a = d = 0$. Vi har alltså visat att $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Då f inte är surjektiv är den inte heller bijektiv.

4. Låt A beteckna den linjära avbildningen från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som består av först en spegling i planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och därefter en projektion på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. (a) Bestäm matrisen för denna linjära avbildning relativt standardbasen. (b) Bestäm avbildningens bildrum och nollrum. **Lösning:** (a) Låt S beteckna speglingen och P projektionen. Låt $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ beteckna standardbasen. Den sökta matrisen är matrisen $(P \circ S)_E = (P)_E (S)_E$. Vi letar först efter en bas B för vilken S har en enkla matrisframställning. För detta tar vi två linjära oberoende vektorer $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ som ligger på planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, och en vektor v_3 som är normal till planet, till exempel

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (-1, -1, 2).$$

Då $S(v_1) = v_1$, $S(v_2) = v_2$ och $S(v_3) = -v_3$ är matrisframställningen av S relativt basen $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ lika med

$$(S)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Basbytematrisen från basen B till standardbasen E är lika med

$$Q = (\mathrm{id})_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i den k:te kolonnen står koordinaterna av v_k relativt standardbasen B). Basbytematrisen från standardbasen E till basen B är lika med

$$(\mathrm{id})_{BE} = Q^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$\begin{aligned}(S)_E &= (\mathrm{id})_{EB}(S)_B(\mathrm{id})_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

På liknande sätt, letar vi efter en bas C för vilken P har en enkel matrisframställning. Vi tar $w_1 = (1, 0, -1)$ och $w_2 = (1, -2, 0)$ som ligger på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, och w_3 som är ortonormal till planet, till exempel

$$w_3 = w_1 \times w_2 = (-2, -1, -2).$$

Då $P(w_1) = w_1$, $P(w_2) = w_2$ och $P(w_3) = 0$, är matrisframställning av P relativ basen $\{w_1, w_2, w_3\}$ lika med

$$(P)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basbytematrisen från basen C till standardbasen E är lika med

$$R = (\mathrm{id})_{EC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Basbytematrisen från standardbasen E till basen C är lika med

$$(\mathrm{id})_{CE} = R^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$\begin{aligned}(P)_E &= (\mathrm{id})_{EC}(P)_C(\mathrm{id})_{CE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Till slut, får vi

$$\begin{aligned}(P \circ S)_E &= (P)_E(S)_E = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -17 & 10 \\ -16 & 14 & 14 \\ 4 & 10 & -17 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. Betrakta den linjära funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierad av

$$f(x, y, z) = (x - z, z - x, x - y).$$

(a) Matrisframställningen av f relativ standard basen $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ är lika med

$$(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Basbytesmatrisen från $B' = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$ till B är lika med

$$P = (\mathrm{id})_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(i den k:te kolonnen står koordinaterna relativt B av den k:te basvektorn av B'. Basbytesmatrisen från B till B' är lika med

$$(\mathrm{id})_{B',B} = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Matrisen $(f)_{B'}$ av f relativt basen B' är lika med

$$\begin{aligned} (f)_{B'} &= (\mathrm{id})_{B',B}(f)_B(\mathrm{id})_{B,B'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Som vanligt, måste man nu tänka på om hur man kan testa att man har fått rätt svar? Jo, kom ihåg vad $(f)_{B'}$ egentligen är: i k:te kolonnen står koordinater av den k:te basvektorn av B' relativt B', dvs att man måste testa att

$$\begin{aligned} f(0,1,1) &= \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{-3}{2}(1,0,1) + (1,1,0), \\ f(1,0,1) &= \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{-1}{2}(1,1,0), \\ f(1,1,0) &= -(0,1,1) + (1,0,1) + 0 \cdot (1,1,0). \end{aligned}$$

6. Om den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vet man att $f(1,2,-1) = (2,2,1)$, $f(0,1,3) = (2,1,1)$ och $f(1,1,1) = (1,1,0)$. Bestäm den inversa avbildningens matris relativt standardbasen. **Lösning:** Observera att $B = \{(1,2,-1), (0,1,3), (1,1,1)\}$ och $C = \{(2,2,1), (2,1,1), (1,1,0)\}$ bildar två baser av $\mathbb{R}^3$. Matrisframställning av f relativ baser B och C är naturligtvis enhetsmatrisen

$$(f)_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisframställningen av f relativt standardbasen är lika med

$$(f)_E = (\mathrm{id})_{E,C}(f)_{C,B}(\mathrm{id})_{B,E},$$

och därmed är matrisframställningen av f^{-1} relativt standardbasen lika med

$$(f^{-1})_E = ((f)_E)^{-1} = (\mathrm{id})_{E,B}\left((f)_{C,B}\right)^{-1}(\mathrm{id})_{C,E} = (\mathrm{id})_{E,B}\mathrm{id})_{C,E}.$$

Vi beräknar alltså de två erforderliga basbytesmatriserna: Basbytesmatrisen från standardbasen $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ till basen C är lika med

$$(\mathrm{id})_{C,E} = ((\mathrm{id})_{E,C})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Och basbytesmatrisen från basen B till standardbasen E är lika med

$$(\mathrm{id})_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså

$$(f^{-1})_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Visa att avbildningen $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ definierad av

$$T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2))$$

(a) är linjär: (1) Låt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$.

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2) \\ &= (a_0+b_0, (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2), (a_0+b_0)+(a_1+b_1)2+(a_2+b_2)4) \\ &= (a_0, a_0+a_1+a_2, a_0+a_12+a_24)+(b_0, b_0+b_1+b_2), b_0+b_12+b_24) \\ &= T(p(x))+T(q(x)). \end{aligned}$$

(2) Låt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2$ och $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\lambda p(x)) &= T(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) = (\lambda a_0, \lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2, \lambda a_0 + \lambda a_1 2 + \lambda a_2 4) \\ &= \lambda(a_0, a_0+a_1+a_2, a_0+a_12+a_24) = \lambda T(p(x)). \end{aligned}$$

(b) T är injektiv: Anta att $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (0,0,0)$. Då är

$$a_0 = 0,\ a_0 + a_1 + a_2 = 0,\ \text{och } a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0,$$

som implicerar att $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. En injektiv linjär avbildning mellan två rum av samma dimension är bijektiv, (c) Matrisframställningen av T relativt standardbasen $\{1, x, x^2\}$ av P_2 och standardbasen $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ av $\mathbb{R}^3$ är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

som har inversen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed är inversen av T avbildningen $S : \mathbb{R}^3 \to P_2$ definierad genom

$$S(a,b,c) = a + (-\frac{3}{2}a + 2b - \frac{1}{2}c)x + (\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c)x^2.$$

(d) Hur kan man tolka denna isomorfi? Ett polynom av grad 2 är fullständigt bestämt genom sin evaluation på tal $0, 1$ och 2 (eller vilken andra tre godtyckliga tal).

8. (a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vara en matris av typ 2×2, och antag att A är ortogonal. Kolonvektorer av A måste alltså vara ortonormala, så att

$$\langle (a,c), (b,d) \rangle = ab + cd = 0.$$

Det följer att det finns $\lambda \in \mathbb{R}$ så att $(b,d) = \lambda(-c,a)$. Eftersom varje radvektor har norm 1, har vi att $a^2 + c^2 = 1$ och $b^2 + d^2 = \lambda^2(a^2 + c^2) = 1$, som implicerar alltså att $\lambda = 1$ eller $\lambda = -1$. Från $a^2 + c^2 = 1$ följer dessutom att $a = \cos(\alpha)$ och $c = \sin(\alpha)$ för en $\alpha \in \mathbb{R}$. Enligt om $\lambda = 1$ eller $\lambda = -1$ ser vi att A måste vara en av

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(b) Multiplikation med A,

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & v & \longmapsto & Av, \end{array}$$

är en rotation med vinkel α om

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

I andra fallet är

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

och är alltså en rotation följd av en spegling kring x-axeln.
(c) I första fallet är

$$\det(A) = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1,$$

och i andra fallet är

$$\det(A) = -\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha^2) = -1,$$

så att om $\det(A) = 1$, då är T_A en rotation och om $\det(A) = -1$, då är T_A en rotation följd av en spegling kring x-axeln.
(d) Ortogonala matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

har $\det(A) = 1$ och är alltså en rotation med vinkeln α med $\cos(\alpha) = -1/\sqrt{2}$ och $\sin(\alpha) = -1\sqrt{2}$, alltså med vinkeln $\alpha = -135°$, medan den ortogonala matrisen

$$B = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

har $\det(B) = -1$ och är en rotation med vinkeln β följd av en spegling kring x-axeln. Vinkeln satisfierar $\cos(\beta) = -1/2$ och $\sin(\beta) = \sqrt{3}/2$, och är därför lika med $\beta = 120°$.

9. Låt A vara följande 4×4 matris och b vara följande vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med Gauss-elimationen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

(a) En partikulär lösning till $Ax = b$, är

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Allmänna lösning till $Ax = 0$ är

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

för $t \in \mathbb{R}$. (c) Allmänna lösning till $Ax = b$ är

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) $Ax = c$ har minst en lösning för varje (kolon-)vektor $c \in \mathbb{R}^4$ som ligger i kolonnrummet av A. Kolonnrummet av A har, enligt Sats 5.5.5, bas bestående av sin första, andra och fjärde kolonnvektor (då den trappstegsform av A har ledande 1 i första, andra och fjärde kolonn), alltså har varje c som ligger i

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

minst en lösning.