KTH, Matematik

Lösningar till Kapitel 4.2-4.3 och 8.1-8.2

1. Se beviset av Sats 8.1.2.
2. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3).$$

(a) Avbildningen f är linjär: (1) Låt $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Vi har

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3)) \\ &= (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3) + (2y_1 - y_2 + y_3, y_2 - 4y_3) \\ &= f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

(2) Låt $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3, \lambda x_2 - \lambda 4x_3) \\ &= = \lambda(2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3) = \lambda f(x_1, x_2, x_3) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

(b) Då

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2,0), \\ f(0,1,0) &= (-1,1), \\ f(0,0,1) &= (1,-4), \end{aligned}$$

är matrisframställningen av f

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Låt $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen med $60°$. Då $R(1,0) = (\cos(60°), \sin(60°)) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ och $R(0,1) = (-\sin(60°), \cos(60°)) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ är matrisframställningen av R

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bilden av vektorn $(1, -1)$ är

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Låt $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen med vinkeln α. Då $R(1,0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ och $R(0,1) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ är matrisframställningen av R

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Sätt $a = \cos(\alpha)$ och $b = \sin(\alpha)$. Då är matrisframstäälning av R alltså

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

och $a^2 + b^2 = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

5. Bestäm bilden av punkten $P = (3, -2, 2)$ efter rotation 90° kring linjen genom origo och punkten $Q = (1, 2, 2)$.
Lösning: Låt $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beteckna den givna rotation. Då Q ligger på rotationsaxeln är $R(Q) = Q$. Vektoren

$$V_0 = P - \left\langle \frac{Q}{\|Q\|}, P \right\rangle \frac{Q}{\|Q\|} = (3, -2, 2) - \left\langle \frac{1}{3}(1, 2, 2), (3, -2, 2) \right\rangle \frac{1}{3}(3, -2, 2) = (\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$$

är rätvinklig mot axeln Q. Det gäller också för vektoren

$$V = \frac{V_0}{\|V_0\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Det betyder att rotationen R kommer att bilda V till en vektor $R(V)$ som är rätvinklig mot båda Q och V. En sådan vektor måste vara en multipel av

$$Q \times V = (2, 1, -2).$$

Då bilden av V måste ha samma längd som V och vara i samma rikning som $Q \times V$ följer att

$$R(V) = \frac{Q \times V}{\|Q \times V\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Vi har

$$P = V_0 + \frac{1}{3}Q = 4V + \frac{1}{3}Q,$$

och därmed är

$$\begin{aligned} R(P) &= R(4V + \frac{1}{3}Q) = 4R(V) + \frac{1}{3}R(Q) \\ &= 4\left(\frac{2}{3}, +\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}Q = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (3, 2, -2). \end{aligned}$$

6. Matrisframställningen av rotationen R med 180° kring y-axeln är

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Det kan vi se från att $R(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ =första kolonn av matrisframställning, $R(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ =andra kolonn av matrisframställning och $R(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$ =tredje kolonn av matrisframställning.) Matrisframställning av ortogonala projektionen p på xz-planet är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Det kan vi se från att $p(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ =första kolonn av matrisframställning, $p(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ =andra kolonn av matrisframställning och $R(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ =tredje kolonn av matrisframställning.) Därmed är matrisframställningen av $f = R \circ p$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \underbrace{\dim\mathrm{Ker}(f)}_{1} + \underbrace{\mathrm{Rank}(f)}_{2}.$$

7. Låt $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ var linjära avbildningen med $A(1,0,0) = (1,2,1)$, $A(0,1,0) = (2,1,2)$ och $A(0,0,1) = (1,1,1)$.
(a) Vi har

$$A(2,1,0) = 2A(1,0,0) + A(0,1,0) = 2(1,2,1) + (2,1,2) = (4,5,4).$$

(b) A:s kärna består av alla vektorer $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ så att $A(x_1, x_2, x_3) = 0$, alltså så att

$$x_1(1,2,1) + x_2(2,1,2) + x_3(1,1,1) = 0.$$

Vi löser detta linjära ekvationssystem (t.ex. med Gauss elimination) och finner att

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{(-t/3, -t/3, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) A:s bildrum består av alla vektorer $A(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, för $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Det kan man också se som delrumet av $\mathbb{R}^3$ som spänns av $(1,2,1), (2,1,2)$ och $(1,1,1)$ (eftersom de tre vektorerna är bilden av standardbasen). Då

$$(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,2,1) + \frac{1}{3}(2,1,2)$$

är

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\left\{(1,2,1), (2,1,2), (1,1,1)\right\} = \mathrm{Span}\left\{(1,2,1), (2,1,2)\right\}.$$

Observera att de två sista vektorer bildar en bas av $\mathrm{Im}(A)$ då de är linjärt oberoende. Det följer alltså att $\mathrm{DimIm}(A) = 2$.
(d) Matrisframställningen av A är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Vi har $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim\mathrm{Ker}(A)}_{=1} + \underbrace{\mathrm{Rank}(A)}_{=2}$.

8. Låt $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonala projektionen på xy-planet. Visa att $p \circ p = p$.
Lösning: Matrisframställning av p är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Påståendet följer från att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Låt $f : P_n \to P_n$ vara avbildningen

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}.$$

(a) (1) Låt $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n \in P_n$. Vi har

$$\begin{aligned}
f(p(x) + q(x)) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n) \\
&= (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x + ... + n(a_n + b_n)x^n \\
&= a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} + b_1 + 2b_2x + ... + nb_nx^n \\
&= f(p(x)) + f(q(x)).
\end{aligned}$$

(2) Låt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \in P_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har

$$\begin{aligned}
f(\lambda p(x)) &= \lambda a_1 + 2\lambda a_2x + ... + n\lambda a_nx^{n-1} \\
&= \lambda(a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}) \\
&= \lambda f(p(x)).
\end{aligned}$$

(b) (i) Då $f(x^2) = 2x \neq 0$ är x^2 inte i $\mathrm{Ker}(f)$. (ii) Då $f(2) = 0$ är 2 i $\mathrm{Ker}(f)$.
(c) (i) Då $f((1/3)x^3) = 3(1/3)x^2 = x^2$ är x^2 i $\mathrm{Im}(f)$. (ii) Däremot är $2 + x^n$ inte i $\mathrm{Im}(f)$ eftersom $\mathrm{Im}(f)$ innehåller inga polynom av grad n.
(d) Vi har

$$\underbrace{\dim(P_n)}_{n+1} = \underbrace{\dim\mathrm{Ker}(f)}_{1} + \underbrace{\mathrm{Rank}(f)}_{n}.$$

(e) $f(p(x))$ är derivatan av polynomet $p(x)$.