KTH, Matematik

Lösningar till Kapitel 7

1. A. (a) Karakteristiska polynomet av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 .$$

(b) Egenvärdena av A är nollställen till karakteristiska polynomet, alltså har A egenvärdet $\lambda = 1$. (c) Motsvarande egenrum E_1 är lösningsrummet till

$$(I_2 - A)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så att

$$E_1 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

B. (a) Karakteristiska polynomet av

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

är

$$\det(\lambda I_2 - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -8 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 16 = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = (\lambda - 5)(\lambda + 3).$$

(b) Egenvärdena av B är nollställen till karakteristiska polynomet, alltså har B egenvärdena $\lambda = 5$ och $\lambda = -3$. (c) Egenrummet E_5 motsvarande egenvärdet $\lambda = 5$ är lösningsrummet till

$$(5I_2 - B)v = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 - 2v_2 \\ -8v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så att

$$E_5 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Egenrummet E_{-3} motsvarande egenvärdet $\lambda = -3$ är lösningsrummet till

$$(-3I_2 - B)v = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4v_1 - 2v_2 \\ -8v_1 - 4v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så att

$$E_{-3} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

C. (a) Karakteristiska polynomet av

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 14 & -15 & 6 \\ 18 & -24 & 11 \end{pmatrix}$$

är

$$\det(\lambda I_3 - C) = \det\begin{pmatrix} \lambda-6 & 7 & -3 \\ -14 & \lambda+15 & -6 \\ -18 & 24 & \lambda-11 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

(b) Egenvärdena av C är nollställen till karakteristiska polynomet, alltså har C egenvärdena $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. (c) Egenrummet E_2 motsvarande egenvärdet $\lambda = 2$ är lösningsrummet till

$$(2I_3 - C)v = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -3 \\ -14 & 17 & -6 \\ -18 & 24 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som man löser med Gauss elimination och får

$$E_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}.$$

Analogt, hittar man egenrummet E_1 motsvarande egenvärdet $\lambda = 1$ och E_{-1} motsvarande egenvärdet $\lambda = -1$ som lösningsrummet till $(I_3 - C)v = 0$, respektive $(-I_3 - C)v = 0$, och får

$$E_1 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \text{ och } E_{-1} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}.$$

D. (a) Karakteristiska polynomet av

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är

$$\det(\lambda I_3 - D) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^3.$$

(b) Egenvärdena av D är nollställen till karaktäristiska polynomet, alltså har D egenvärdet $\lambda = 1$. (c) Motsvarande egenrum E_1 är lösningsrummet till

$$(I_3 - D)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ 0 \\ -v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så att

$$E_1 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

2. Om rotationsvinkel inte är 0° eller 180°, då ligger bilden av en icke noll vektor aldrig parallell till vektorn själv. Därmed har en rotationsmatris (i planet) med rotationsvinkel olik 0° och 180° inga egenvektorer, och därmed också inga egenvärden. Alternativt, kan man se att karakteristiska polynomet har, om rotationsvinkel är olik 0° och 180°, inga reella egenvärden.

3. A: (a) Då karakteristiska polynomet av A är lika med $(\lambda - 1)^2$ är den algebraiska multipliceten av egenvärdet $\lambda = 1$ lika med 2. Då dimensionen av egenrummet E_1 är lika med 1 är den geometriska multipliciteten av $\lambda = 1$ lika med 1.

(b) Då den algebraiska och geometriska multpliciteterna av egenvärdet inte är lika, är matrisen inte diagonaliserbar.

B: (a) Den algebraiska och geometriska multipliciteten av båda egenvärdena är lika med 1.

(b) Då den algebraiska och geometriska multpliciteterna av båda egenvärderna är lika och addera till 2, är matrisen diagonaliserbar.

(c) Diagonalmatrisen D består av egenvärdena av B, så att

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

och matrisen P är basbytesmatris från basen av egenvektorer

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

till standardbasen, så att

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Obs: När ni har kommit så långt, testa att PDP^{-1} verkligen är lika med B!

C: (a) Den algebraiska och geometriska multipliciteten av egenvärde 2, 1 och -1 är lika med 1.

(b) Då den algebraiska och geometriska multpliciteter av båda egenvärdena är lika och addera till 3, är matrisen diagonaliserbar.

(c) Diagonalmatrisen D består av egenvärdena av C, så att

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

och matrisen P är basbytesmatris från basen av egenvektorer (tagen i samma ordning som egenvärdet i D)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

till standardbasen, så att

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

D: (a) Algebraiska multipliceten av egenvärdet $\lambda = 1$ är lika med 3. Då dimensionen av egenrummet E_1 är lika med 1 är den geometriska multipliceten av $\lambda = 1$ lika med 1.

(b) Då den algebraiska och geometriska multpliciteter av egenvärdet inte är lika, är matrisen inte diagonaliserbar.

4. För att beräkna A^{10}, börja vi med att hitta egenvärdena av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Karaktäristiska polynomet av A är lika med $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, så att A har de två egenvärde 1 och 2. Egenrummet E_1 motsvarande egenvärdet 1 hittar vi som lösningen av $(I_2 - A)v = 0$, så att

$$E_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

och egenrummet E_2 motsvarande egenvärdet 2 hittar vi som lösning av $(2I_2 - A)v = 0$ så att

$$E_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Det följer att för

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är $A = PDP^{-1}$, och därmed är

$$\begin{aligned} A^{10} &= (PDP^{-1})^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. För varje av följande symmetriska matriser S, hitta en ortogonal matris P så att $P^{-1}SP$ är diagonal.

Lösning: (a) Vi hittar P som basbytesmatrisen från en ortonormalbas av egenvektorer till standardbasen. Därför beräkna vi först att egenvärdena av

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

som är lösningen till $\det(\lambda I_2 - S) = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$, är $\lambda = -1$ och $\lambda = 3$. Motsvarande egenrum är

$$E_{-1} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ och } E_3 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Basbytesmatrisen från ortonormal basen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

till standardbasen är lika med ortogonala matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

så att

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi hittar P som basbytesmatrisen från en ortonormalbas av egenvektorer. till standardbasen. Därför beräknar vi först att egenvärdena av

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix},$$

som är lösningen till $\det(\lambda I_3 - S) = (\lambda - 9)^2(\lambda + 9) = 0$, är $\lambda = 9$ och $\lambda = -9$. Motsvarande egenrum är

$$E_9 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ och } E_{-9} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Basbytesmatrisen från ortonormal basen

$$\left\{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ -4/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right\}$$

till standardbasen är lika med

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(c) Vi hittar P som basbytesmatrisen från en ortonormalbas av egenvektorer till standardbasen. Därför beräkna vi först att egenvärdena av

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

som är lösningen till $\det(\lambda I_3 - S) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 10\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 10) = 0$, är $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ och $\lambda = 10$. Motsvarande egenrum är

$$E_0 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},\ E_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \text{ och } E_{10} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Basbytesmatrisen från ortonormal basen

$$\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

till standardbasen är lika med

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/3\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 4/3\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -2/3 & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

6. Hitta en 3×3 matris med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = 7$ och tillhörande egenvektorer

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: En ortonormal bas av egenvektorer är

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Låt ortogonala matrisen P vara basbytesmatrisen från ovanstående basen av egenvektorer till standardbasen och diagonalmatrisen D består av egenvärde av A, dvs

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

så att

$$\begin{aligned} A &= PDP^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 7/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 7/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obs: Kontrollera nu att $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ och $Av_3 = \lambda_3 v_3$.

7. En symmetrisk 3×3 matris A har karakteristiska polynomet $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$, och alltså egenvärderna -1 och 1. En egenvektor hörande till egenvärdet 1 är

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen A.

Lösning: Egenrummet motsvarande egenvärdet -1 ligger ortogonal till egenvärdet motsvarande egenvärde 1 och består därmed av vektorer för vilka

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = -v_2 + v_3 = 0.$$

Vi hittar alltså en ortonormal bas av egenvektorer som

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Låt ortogonala matrisen P vara basbytesmatrisen från ovanstående basen av egenvektorer till standardbasen och diagonalmatrisen D består av egenvärde av A, dvs

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

så att

$$\begin{aligned} A &= PDP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obs: Kontrollera att A är den sökta matrisen, dvs att $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$ och

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$