KTH, Matematik

Lösningar till övningarna till Kapitel 6.1-6.5

1. (a) Produkten
$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 + 4x_2y_2$$
definierar en inreprodukt på $\mathbb{R}^2$:
1. Symmetriaxiomet: $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1+4x_2y_2 = 2y_1x_1+4y_2x_2 = \langle (y_1,y_2),(x_1,x_2)\rangle$.
2. Additionsaxiomet:
$$\begin{aligned}\langle (x_1,x_2)+(y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle &= \langle (x_1+y_1,x_2+y_2),(z_1,z_2)\rangle = 2(x_1+y_1)z_1+4(x_2+y_2)z_2\\ &= 2x_1z_1+4x_2z_2+2y_1z_1+4y_2z_2\\ &= \langle (x_1,x_2),(z_1,z_2)\rangle + \langle (y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle .\end{aligned}$$
3. Homogenitetsaxiomet:
$$\begin{aligned}\langle \lambda(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle &= \langle (\lambda x_1,\lambda x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2\lambda x_1y_1+4\lambda x_2y_2\\ &= \lambda(2x_1y_1+4x_2y_2) = \lambda\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle .\end{aligned}$$
4. Positivetsaxiomet: $\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = 2x_1^2+4x_2^2 \geq 0$ och $\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = 2x_1^2+4x_2^2 = 0$ om och endast om $x_1^2=0$ och $x_2^2=0$, alltså om och endast om $(x_1,x_2)=(0,0)$.
(b) Produkten
$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$
definierar inte en inreprodukt på $\mathbb{R}^2$ eftersom positivitetsaxiom inte gäller: För $(x_1,x_2) = (1,-1)$ har vi
$$\langle (1,-1),(1,-1)\rangle = -2-2 = -4 < 0.$$

2. Låt u, v vara vektorer i ett inreproduktrum. Om u och v är linjärt beroende, då finns det $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ inte båda noll, så att $\lambda u + \mu v = 0$. Då påståendet är symmetrisk i u och v kan vi anta att $\lambda \neq 0$, och alltså $v = (-\mu/\lambda)u$. Då har vi
$$|\langle u,v\rangle| = \left|\left\langle u, \frac{-\mu}{\lambda}u\right\rangle\right| = \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| |\langle u,u\rangle| = \left|\frac{\mu}{\lambda}\right| \|u\|^2 = \|u\| \left(\left\|\left(\frac{-\mu}{\lambda}\right)u\right\|\right) = \|u\|\,\|v\| .$$
Antag nu att u och v är vektorer så att $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$. Vi måste visa att u och v är linjärt beroende. I beviset av Cauchy-Schwarz olikhet såg vi att olikheten var ekvivalent med att diskrimanten b^2-4ac av polynomet at^2+bt+c var mindre eller lika med 0. (Notation som i bok och i föreläsning: $a=\langle u,u\rangle$, $b=2\langle u,v\rangle$, $c=\langle v,v\rangle$.) Om vi nu har likhet måste diskrimanten vara lika med 0, vilket betyder precis att polynomet at^2+bt+c har en (och bara en) rot. Det finns alltså $t\in\mathbb{R}$ så att $at^2+bt+c=0$. Men vi såg att $at^2+bt+c = \langle tu+v, tu+v\rangle$, så att det följer från positivitetsaxiomet att $tu+v=0$, och u och v är alltså linjärt beroende.

3. Observera att en vektor är ortogonal till U om och endast om den är ortogonal till $(1,2)$. Därför är ortogonala komplementet $U^\perp$ lika med
$$\begin{aligned}U^\perp &= \{(x_1,x_2) \mid \langle (x_1,x_2),(1,2)\rangle = 0\} = \{(x_1,x_2) \mid 2x_1+8x_2=0\}\\ &= \{t(-4,1) \mid t\in\mathbb{R}\} .\end{aligned}$$

4. Då V är lika med radrummet av matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

är $V^\perp$ lika med nollrummet av A (se Sats 6.2.6). Vi använder Gauss-Jordan elimination för att lösa $Ax = 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Nollrummet av A, och därmed också $V^\perp$, består av vektorer $(-t+s, t, -2s, s)$, för $s, t \in \mathbb{R}$. Alltså

$$V^\perp = \{t(-1,1,0,0) + s(1,0,-2,1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorer $(-1,1,0,0)$ och $(1,0,-2,1)$ spänner $V^\perp$ och de är linjärt oberoende eftersom de inte är på samma linje. Alltså är $\{(-1,1,0,0), (1,0,-2,1)\}$ en bas för $V^\perp$.

5. Vi beräknar

$$\begin{aligned}
v_1 \cdot v_1 &= (-3/5, 4/5, 0) \cdot (-3/5, 4/5, 0) = (-3/5)^2 + (4/5)^2 + 0^2 = \frac{9+16}{25} = 1, \\
v_1 \cdot v_2 &= (-3/5, 4/5, 0) \cdot (4/5, 3/5, 0) = (-3/5)(4/5) + (4/5)(3/5) = \frac{-12+12}{25} = 0, \\
v_1 \cdot v_3 &= (-3/5, 4/5, 0) \cdot (0,0,1) = (-3/5) \cdot 0 + (4/5) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \\
v_2 \cdot v_2 &= (4/5, 3/5, 0) \cdot (4/5, 3/5, 0) = (4/5)^2 + (3/5)^2 + 0^2 = \frac{16+9}{25} = 1, \\
v_2 \cdot v_3 &= (4/5, 3/5, 0) \cdot (0,0,1) = (4/5) \cdot 0 + (3/5) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \\
v_3 \cdot v_3 &= (0,0,1) \cdot (0,0,1) = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1.
\end{aligned}$$

Vektorerna $\{v_1, v_2, v_3\}$ bildar alltså en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$. Från Sats 6.3.5, har vi

$$\begin{aligned}
(1,-1,2) &= \langle (1,-1,2), v_1 \rangle v_1 + \langle (1,-1,2), v_2 \rangle v_2 + \langle (1,-1,2), v_3 \rangle v_3 \\
&= -\frac{7}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 + 2v_3, \\
(3,-7,4) &= \langle (3,-7,4), v_1 \rangle v_1 + \langle (3,-7,4), v_2 \rangle v_2 + \langle (3,-7,4), v_3 \rangle v_3 \\
&= -\frac{37}{5} v_1 - \frac{9}{5} v_2 + 4v_3.
\end{aligned}$$

6. Betrakta $\mathbb{R}^3$ med den standard skalärprodukten. Använd Gram-Schmidt förfarande för att transfomera basen $\{u_1, u_2, u_3\}$ till en ortonormal bas:
(i) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$, $u_3 = (1,2,1)$: Första vektorn u_1 har inte norm 1, så vi normaliserar u_1 till

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Vektorn u_2 är redan ortogonal till v_1 (och till u_1), så vi behöver bara normalisera den till

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0).$$

Vektorn $\overline{v}_3$, ortogonal till v_1 och v_2, och i rummet som spänns av u_1, u_2 och u_3 erhålls, enligt Gram-Schmidt, som

$$\begin{aligned}
\overline{v}_3 &= u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = (1,2,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) \\
&= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right),
\end{aligned}$$

som vi normaliserar till

$$v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Den sökta ortonormala basen är $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(ii) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (3, 7, -2)$, $u_3 = (0, 4, 1)$. Vektorn u_1 har redan norm 1, så vi sätter $v_1 = u_1 = (1, 0, 0)$. Vektorn $\overline{v}_2$ (ortogonal till v_1 och i planet som spänns av u_1 och u_2) erhålls, enligt Gram-Schmidt, som

$$\overline{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle\, v_1 = (3, 7, -2) - 3(1, 0, 0) = (0, 7, -2),$$

som vi normaliserar till

$$v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{53}}(0, 7, -2).$$

Vektorn $\overline{v}_3$ (ortogonal till v_1 och v_2, och i rummet som spänns av u_1, u_2 och u_3) erhålls, enligt Gram-Schmidt, som

$$\begin{aligned} \overline{v}_3 &= u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle\, v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle\, v_2 = (0, 4, 1) - 0 \cdot (1, 0, 0) - \frac{26}{53}(0, 7, -2) \\ &= \frac{1}{53}\left(0, 30, 105\right), \end{aligned}$$

som vi normaliserar till

$$v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{53}}(0, 2, 7).$$

Den sökta orthonormala basen är $\{v_1, v_2, v_3\}$.

7. Då matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har linjärt oberoende kolonnor, vet vi att det bara finns en lösning. Vi har

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

och

$$A^t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $A^t A$ har inversen

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Normalsystemet $A^t A x = A^t b$ har alltså lösningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1}(A^t b) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Detta är den sökta minsta kvadrat lösningen.

8. Vi börjar med att hitta en ortonormal bas för delrummet $W = \text{Span}\{(1,1,0),(1,2,1)\}$ av $\mathbb{R}^3$. Det kan vi göra genom Gram-Schmidt. Vi börjar med att normalisera första vektorn $(1,1,0)$ till

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \in W.$$

Vektorn $\overline{w}_2$, ortogonal till w_1 och i rummet W erhålls som

$$\begin{aligned} \overline{w}_2 &= (1,2,1) - \langle (1,2,1), w_1 \rangle w_1 = (1,2,1) - \frac{3}{2}(1,1,0) \\ &= (-1/2, 1/2, 1), \end{aligned}$$

som vi normaliserar till

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2).$$

Basen $\{w_1, w_2\}$ är en ortonormal bas till W, och vi kan nu beräkna ortogonala projektion av $(2,1,3)$ på W som (se Sats 6.3.5):

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(2,1,3) &= \langle (2,1,3), w_1 \rangle w_1 + \langle (2,1,3), w_2 \rangle w_2 = \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{5}{6}(-1,1,2) \\ &= (2/3, 7/3, 5/3). \end{aligned}$$

9. (a) Transition matrisen P från basen $\{(1,0),(0,1)\}$ till basen $\{(2,-4),(3,8)\}$ är

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Därmed är transition matrisen P' från basen $\{(2,-4),(3,8)\}$ till basen $\{(1,0),(0,1)\}$ lika med

$$P' = P^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Koordinater av $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ relativt basen $\{(2,-4),(3,8)\}$ är alltså

$$P'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

och vi testar att $(1,1) = \frac{1}{28}(5 \cdot (2,-4) + 6 \cdot (3,8))$.

(b) Transition matrisen P från basen $\{1, x, x^2\}$ till basen $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$ är

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed är transition matrisen P' från basen $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$ till basen $\{1, x, x^2\}$ lika med

$$P' = P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Koordinater av $2 - x + x^2$ relativt basen $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$ är

$$P'\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

och vi testar att $2 - x + x^2 = 0 \cdot (1+x) + 2 \cdot (1+x^2) + (-1)(x+x^2)$.