KTH, Matematik

Övningar till Kapitel 5.1 till 5.4

1. Bevisa att mängden $P_1 = \{a_0 + a_1x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ av polynom av grad högst 1, med addition

$$(a_0 + a_1x) + (b_0 + b_1x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$$

och multiplikation med reella tal λ

$$\lambda(a_0 + a_1x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x,$$

är ett vektorrum.
Lösning: Kolla aktiomer...

2. Bestäm om mängden av alla par av reella tal $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ med addition

$$(x, y) + (x' + y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$$

och multiplikation med reella tal λ

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

är ett vektorrum.
Lösning: Det är inga vektorrum då distributivitäts axiom inte håller: Vi har

$$\lambda\left[(x, y) + (x', y')\right] = \lambda(x + x' + 1, y + y' + 1) = (\lambda x + \lambda x' + \lambda, \lambda y + \lambda y' + \lambda),$$

men

$$\lambda(x, y) + \lambda(x', y') = (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') = (\lambda x + \lambda x' + 1, \lambda y + \lambda y' + 1),$$

och vi ser att båda vektorer kan inte vara lika när $\lambda \neq 1$.

3. Bestäm om följande delmängder av $M_{22} = \{\text{reella matriser av typ } 2 \times 2\}$ är delrum till M_{22}:

$$(a)\ U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$(b)\ V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) U är inte delrum till M_{22} eftersom, till exempel,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U,$$

men

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \notin U.$$

(b) Vi bevisar att V är delrum till M_{22}: (1) V är inte tomt, då $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$.

(2) V är sluten för addition: Låt

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 + b_2 \\ a_2 - b_1 & 0 \end{pmatrix} \in V.$$

Då är

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1+b_1 \\ a_1-b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2+b_2 \\ a_2-b_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & 0 \end{pmatrix} \in V.$$

(3) V är sluten för multiplikation med reella tal: Låt $\lambda \in \mathbb{R}$ och

$$\begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \in V.$$

Då är

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a+\lambda b \\ \lambda a-\lambda b & 0 \end{pmatrix} \in V.$$

4. Bestäm om följande mängder av vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende, spänner $\mathbb{R}^3$, eller/och är baser av $\mathbb{R}^3$:
(i) $S = \{(1,2,3),(5,1,3)\}$ är linjärt oberoende, då båda vektorer inte ligger på samma linjen genom origo. Mängden S spänner inte $\mathbb{R}^3$ eftersom vektoren $(1,0,0)$ kan man inte skriva som linjär kombination av $(1,2,3)$ och $(5,1,3)$. För att ser det, antar att det finns $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ så att

$$(1,0,0) = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(5,1,3).$$

Det är ekvivalent till linjär ekvationsystemet

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Från den 3:3 ekvation får vi $\lambda_1 = -\lambda_2$, men då blir den 2:a ekvation $2\lambda_1 - \lambda_1 = \lambda_1 = 0$, alltså får vi $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$, men då blir den 1:a ekvation $0 = 1$, som är omöjligt. Då S inte spänner $\mathbb{R}^3$, är S inga bas av $\mathbb{R}^3$.
(ii) $S = \{(1,2,3),(5,1,3),(1,-1,-1)\}$ är linjärt beroende då

$$2(1,2,3) + (-1)(5,1,3) + 3(1,-1,-1) = (0,0,0).$$

Mängden S spänner inte $\mathbb{R}^3$: Då

$$\frac{-2}{3}(1,2,3) + \frac{1}{3}(5,1,3) = (1,-1,-1),$$

är $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(S \setminus \{(1,-1,-1)\})$, och vi har visat i (i) att sista mängden inte spänner $\mathbb{R}^3$. Eftersom S varken är linjärt oberoende eller spänner $\mathbb{R}^3$, är det också inga bas av $\mathbb{R}^3$.
(iii) $S = \{(1,2,3),(5,1,3),(1,-1,-1),(1,1,0)\}$ är linjärt beroende då S innehåller mängden $\{(1,2,3),(5,1,3),(1,-1,-1)\}$ som vi visade i (ii) är linjärt beroende. Mängden S spänner $\mathbb{R}^3$ då den innehåller mängden $\{(1,2,3),(5,1,3),(1,1,0)\}$, som vi ska visa i (iv) spänner $\mathbb{R}^3$. Då S är linjärt beroende spänner S inte $\mathbb{R}^3$.

(iv) $S = \{(1,2,3),(5,1,3),(1,1,0)\}$ är en bas till $\mathbb{R}^3$ (alltså är S linjärt oberoende och spänner $\mathbb{R}^3$ då

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3(5-1)-3(1-2) = 9 \neq 0.$$

5. Vektorer (x_1, x_2, x_3, x_4) i $\mathbb{R}^4$ som satisfierar ekvationen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

bildar ett delrum till $\mathbb{R}^4$, då lösningar till linjära ekvationssystemer är delrumer. Vi kan välja $x_2 = t$, $x_3 = s$ och $x_4 = u$ godtyckligt och får då att

$$x_1 = -2x_2 - x_2 + 2x_4 = -2t - s + 2u.$$

De sökta vektorerna (x_1, x_2, x_3, x_4) är följande:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-2,1,0,0) + s(-1,0,1,0) + u(2,0,0,1).$$

Vektorerna $(-2,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ och $(2,0,0,1)$ är linjärt oberoende och spånner upp lösningsrummet. De bilder alltså en bas till lösningsrummet som därmed har dimension 3.

6. Vektorerna $(1,2,1,3)$, $(1,0,-1,2)$, $(1,1,1,1)$ och $(2,a,a,2a)$ är linjärt beroende precis då

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 2a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & a+2 \\ 1 & 0 & -1 & 2a-4 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 2 & a+2 \\ 1 & -1 & 2a-4 \end{pmatrix} \\ &= -2\det\begin{pmatrix} 2 & a+2 \\ -1 & 2a-4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & a+2 \\ 1 & 2a-4 \end{pmatrix} - a\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -2(5a-6) + (3a-10) - a(-4) = 2 - 3a. \end{aligned}$$

Alltså precis då $a = 2/3$. (Och linjärt oberoende precis då $a \neq 2/3$.)

7. Vektorerna $(1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$ och $(1,-1,-1,1)$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$ då

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -16 \neq 0. \end{aligned}$$

Nu återsår att lösa systemet

$$\lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(1,1,-1,-1) + \lambda_3(1,-1,1,-1) + \lambda_4(1,-1,-1,1) = (1,2,3,4).$$

Med Gauss elimination, får vi

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Man får att $x_4 = 0$, $x_3 = -1/2 - x_4 = -1/2$, $x_2 = -1 - x_4 = -1$ och $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 + 1 + 1/2 = 5/2$. Koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i denna bas är alltså $(5/2, -1, -1/2, 0)$.

8. Mängden $\{1, t, t^2, t^3\}$ spänner P_3 då varje polynom av grad högst tre kan skrivas som linjärt kombination

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3.$$

Antar nu att $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = 0$. Det betyder att varje $x \in \mathbb{R}$ är en rot till $p(x)$. Då en icke noll polynom av grad högst 3 har högst 3 roter, måste $p(x)$ vara nollpolynomen, och alltså $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, som visar att mängden $\{1, t, t^2, t^3\}$ också är linjärt oberoende, och alltså är en bas till P_3. Rummet P_3 har därmed dimension 4 (= antal element i en bas). Koordinater av polynomen $1 - t^2$, $2t - t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ relativ basen $\{1, t, t^2, t^3\}$är $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 2, 0, -1)$ och $(1, 1, 1, 1)$. Vi försöker att kompletera med polynomen 1 som har koordinater $(1, 0, 0, 0)$ relativ basen $\{1, t, t^2, t^3\}$. Då

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

kan vi kompletera polynomen $1 - t^2$, $2t - t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$med polynomet 1 och erhåller en bas för P_3.