KTH, Matematik

Lösning till övningarna till Kapitel 3 och 4.1

1. (a) Låt $u = (0, 0, -1)$, $v = (1, 1, 1)$. Vi har

$$u \cdot v = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -1.$$

Eftersom $u \cdot v < 0$ är vinkeln mellan u och v trubbig.

(b) Låt $u = (-6, 0, 4)$, $v = (3, 1, 6)$. Vi har

$$u \cdot v = (-6) \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 6.$$

Eftersom $u \cdot v > 0$ är vinkeln mellan u och v spetsig.

(c) Låt $u = (2, 4, -8)$, $v = (2, -1, 0)$. Vi har

$$u \cdot v = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-8) \cdot 0 = 0.$$

Eftersom $u \cdot v = 0$ är vinkeln mellan u och v rät.

2. Låt $u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.

(a) Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= ((u_1+v_1)^2 + ... + (u_n+v_n)^2) + ((u_1-v_1)^2 + ... + (u_n-v_n)^2) \\
&= (u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + ... + u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2) \\
&\quad +(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + ... + u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2) \\
&= 2(u_1^2 + ... + u_n^2) + 2(v_1^2 + ... + v_n^2) \\
&= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 .
\end{aligned}$$

(b) Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 &= \frac{1}{4}((u_1+v_1)^2 + ... + (u_n+v_n)^2) \\
&\quad -\frac{1}{4}((u_1-v_1)^2 + ... + (u_n-v_n)^2) \\
&= \frac{1}{4}(u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + ... + u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2) \\
&\quad -\frac{1}{4}(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + ... + u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2) \\
&= \frac{1}{4}(4u_1v_1 + ... + 4u_nv_n) \\
&= u \cdot v.
\end{aligned}$$

3. Om linjerna med parameterformerna

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(1, 0, -1) \text{ respektive } (x, y, z) = (2, a, 1) + t(2, 1, -1)$$

skär varandra, då finns det $t, s \in \mathbb{R}$ så att

$$(1, 1, 2) + t(1, 0, -1) = (2, a, 1) + s(2, 1, -1),$$

alltså

$$(1 + t, 1, 2 - t) = (2 + 2s, a + s, 1 - s),$$

och vi måste lösa linjära ekvationsystemet

$$\begin{cases} t & -2s & & = & 1, \\ & s & +a & = & 1, \\ t & -s & & = & 1. \end{cases}$$

Det kan man lösa med Gauss elimination. Eller så ser man på en gång att om man substrahera den första rad till den tredje, får man $s = 0$. Från det löser man $t = 1$ och $a = 1$. De två linjerna skär alltså varandra om och endast om $a = 1$ (i vilket fal skärningspunkten är $(2, 1, 1)$).

4. Ett parallellogram kännetecknas av att sidorna paravis är parallella. Eftersom

$$\begin{aligned} (2, 3, 4) - (1, 1, 2) = & \quad (1, 2, 2) & = (4, 1, 1) - (3, -1, -1), \\ (4, 1, 1) - (2, 3, 4) = & \quad (2, -2, -3)) & = (3, -1, -1) - (1, 1, 2), \end{aligned}$$

är punkterna $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(3, -1, -1)$ och $(4, 1, 1)$ hörn i en parallellogram. Parallellogrammets yta är lika med normen av kryssprodukten av $(1, 2, 2)$ och $(2, -2, -3)$, alltså lik med

$$\|(1, 2, 2) \times (2, -2, -3)\| = \|(-2, 7, -6)\| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{89}.$$

5. En triangel har hörn i punkterna $A = (1, 2, 1)$, $B = (-1, 3, 0)$ och $C = (1, 1, 1)$. Låt α, β, γ beteckna vinklerna i respektiva hörner A, B, C. Sidovektorerna är givna genom

$$\begin{aligned} v_{AB} = -v_{BA} &= (-1, 3, 0) - (1, 2, 1) = (-2, 1, -1), \\ v_{BC} = -v_{CB} &= (1, 1, 1) - (-1, 3, 0) = (2, -2, 1), \\ v_{CA} = -v_{AC} &= (1, 2, 1) - (1, 1, 1) = (0, 1, 0), \end{aligned}$$

Vi har alltså

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{v_{AB} \cdot v_{AC}}{\|v_{AB}\| \cdot \|v_{AC}\|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}, \\
\cos(\beta) &= \frac{v_{BA} \cdot v_{BC}}{\|v_{BA}\| \cdot \|v_{BC}\|} = \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \frac{7}{3\sqrt{6}}, \\
\cos(\gamma) &= \frac{v_{CA} \cdot v_{CB}}{\|v_{CA}\| \cdot \|v_{CB}\|} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Triangelns ytan är hälften av den ytan som det parallellogram har, som spänns upp av v_{AB} och v_{AC} dvs

$$
\frac{1}{2}\|v_{AB} \times v_{AC}\| = \frac{1}{2}\|(-1,0,-2)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+0+4} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.
$$

Triangelns omkrets är lika med

$$
\|v_{AB}\| + \|v_{BC}\| + \|v_{CA}\| = \sqrt{6} + 3 + 1 = 4 + \sqrt{6}.
$$

6. För att hitta skärningspunkten mellan planet $2x + y + 3z = 4$ och linjen med parameterformen

$$
(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -1, 0)
$$

sätter vi in i planets ekvation en punkt $(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 3)$ från linjen. Då får vi

$$
2(1 + t) + (2 - t) + 3 \cdot 3 - 4 = 9 + t.
$$

För att $(1 + t, 2 - t, 3)$ ska vara på planet, måste alltså $9 + t$ vara lika med 0, och skärningspunkten är

$$
(-8, 11, 3).
$$

7. Låt P_1 vara planet $x - y - 4z = 2$ och P_2 vara planet $-2x + y + 2z = 3$. Linjen $\ell = P_1 \cap P_2$ består av alla punkter (x, y, z) som är lösning till båda planens ekvationer. Vi måste alltså lösa

$$
\left\{
\begin{array}{rrrcl}
x & -y & -4z & = & 2, \\
-2x & +y & +2z & = & 3.
\end{array}
\right.
$$

Med Gauss elimination får vi $x = -5 - 2t$, $y = -7 - 6t$, $z = t$, för $t \in \mathbb{R}$. Parameterformen av ℓ är alltså

$$
(-5, -7, 0) + t(-2, -6, 1).
$$

Om man parallellförflyttar ℓ och $(2,4,-1)$ med $(5,7,0)$ ser man att avståndet från ℓ till $(2,4,-1)$ är samma som avståndet mellan linjen ℓ_0 med parameterformen $t(-2,-6,1)$ och

$$A = (2,4,-1) - (-5,-7,0) = (7,11,-1).$$

Om vi låter $v = (-2,-6,1)$ vara riktningen av ℓ_0 (och ℓ), är avståndet mellan A och ℓ_0 samma som längden av vektoren $A - \mathrm{proj}_v(A)$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_v(A) &= \frac{v \cdot A}{\|v\|^2} v = \frac{(-2)\cdot 7 + (-6)\cdot 11 + 1 \cdot (-1)}{(-2)^2 + (-6)^2 + 1^2}(-2,-6,1) \\ &= \frac{-81}{41}(-2,-6,1).\end{aligned}$$

Alltså är avståndet lika med

$$\begin{aligned}\|A - \mathrm{proj}_v(A)\| &= \left\|(7,11,-1) + \tfrac{81}{41}(-2,-6,1)\right\| = \left\|(7 - \tfrac{162}{41}, 11 - \tfrac{486}{41}, -1 + \tfrac{81}{41})\right\| \\ &= \left\|(\tfrac{125}{41}, -\tfrac{35}{41}, \tfrac{40}{41})\right\| = \tfrac{\sqrt{125^2+35^2+40^2}}{41} = \tfrac{\sqrt{18450}}{41}.\end{aligned}$$

8. Ett plan innehåller linjen ℓ med parameterformen

$$(x,y,z) = (0,2,1) + t \cdot (1,-1,1)$$

samt punkten $(1,2,3)$. Bestäm planets ekvation, visa att punkten $Q = (1,1,1)$ inte tillhör planet, och beräkna avståndet från Q till planet.
Lösning: Med $t = 0$ får vi punkten $S = (0,2,1)$, som tillhör linjen ℓ och alltså också planet. Eftersom planet också ska innehåller punkten $(1,2,3)$ är skillnaden

$$(1,2,3) - (0,2,1) = (1,0,2)$$

parallell med planet. Linjens riktningsvektor $(1,-1,1)$ är parallell med linjen, och alltså parallell med planet. För att bestämma planets ekvation behöver vi en normalvektor till planet som vi kan ta som t ex kryssprodukten av $(1,0,2)$ och $(1,-1,1)$:

$$n = (1,0,2) \times (1,-1,1) = (2,1,-1).$$

Planets ekvation blir nu

$$2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + (-1) \cdot (z-3) = 0, \qquad \text{dvs } 2x + y - z = 1.$$

Punkten Q tillhör planet precis då dess koordinater satisfierar planets ekvation. Vi finner att

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2 \neq 1,$$

och således tillhör inte punkten Q det givna planet. Avståndet från $Q = (1,1,1)$ till planet är lik

$$\frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

9. Planet vars punkter är på samma avstånd från $(-1,-4,-2)$ som från $(0,-2,2)$ måste gå genom mittpunkten

$$\frac{(-1,-4,-2) + (0,-2,2)}{2} = (-1/2, -3, 0)$$

mellan $(-1,-4,-2)$ och $(0,-2,2)$. Dessutom måste planet vara vinkelrät mot linjen mellan $(-1,-4,-2)$ och $(0,-2,2)$, alltså vinkelrät mot

$$(0,-2,2) - (-1,-4,-2) = (1,2,4).$$

Det betyder att $(1,2,4)$ är en normalvektor till planet, och vi får planets ekvation som, t ex,

$$1\cdot(x+1/2) + 2\cdot(y+3) + 4\cdot z = x + 2y + 4z + 7/2 = 0.$$

10. En parallellepiped har ett hörn i origo och de tre angränsande hörnen i punkterna $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ och $(3,1,2)$.

(a) Parallellepipedens volym är lika med

$$\begin{aligned}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\right| &= \left|1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right|\\ &= |1 - 7 + 2| = 4.\end{aligned}$$

(b) Frågan om en punkt $P = (x,y,z)$ ligger inuti, på ytan till, eller utanför parallellepipeden, avgörs av värdena på talen $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, i utveckligen

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,1) + \mu(2,0,-1) + \nu(3,1,2).$$

Ritar man en figur så ser man att om samtliga av dessa tal λ, μ, ν ligger strikt mellan 0 och 1 så ligger punkten inuti parallellepipeden. Om ett av dessa tal är 0 eller 1 och övriga mellan 0 och 1 så ligger punkten på ytan. I övriga fall (om ett av λ, μ, ν är strikt större än 1 eller strikt mindre än 0) då ligger punkten utanför parallellepipeden.

Vi behöver alltså skriva punkterna $(3,1,1)$,$(4,1,1/2)$ respektive $(6,3,4)$ som linjär kombination av parallellepipedens sido vektorer $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ och $(3,1,2)$. Det betyder att vi måste lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b^t,$$

då $b = (b_1, b_2, b_2)$ är lika med punkterna $(3,1,1)$,$(4,1,1/2)$ eller $(6,3,4)$. Med Gauss-Jordan elimination, löser vi de tre systemen simultant:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1/2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -7/2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -7/2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5/2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 5/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 5/2 & 9/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 5/4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 7/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 5/4 \end{array}\right).$$

Vi har alltså

$$\begin{aligned} (3,1,1) &= \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(2,0,-1) + \frac{1}{2}(3,1,2), \\ (4,1,1/2) &= \frac{1}{2}(1,1,1) + 1(2,0,-1) + \frac{1}{2}(3,1,2), \\ (6,3,4) &= \frac{7}{4}(1,1,1) + \frac{1}{4}(2,0,-1) + \frac{5}{4}(3,1,2). \end{aligned}$$

Punkten $(3,1,1)$ ligger alltså inuti parallellepipeden, $(4,1,1/2)$ på dess yta och $(6,3,4)$ utanför parallellepipeden.

11. Låt P beteckna planet som ges av ekvationen $x+y-2z=3$. Bestäm en ekvation för det plan som ligger vinkelrätt mot P och som innehåller punkterna $(1,1,1)$ och $(0,-1,1)$.
Lösning: Det sökta planet P_0 inehåller punkterna $A = (1,1,1)$ och $B = (0,-1,1)$, och därför också linjen som innehåller A och B med parameterform $(1,1,1) +$

$t(1,2,0)$ så vi har att linjens riktning $v = (1,2,0)$ är parallel till P_0.
Låt $n = (1,1,-2)$ vara en normalvektor till planet P. Eftersom vi vill att P_0 ska vara vinkelrät mot P, måste en normalvektor n_0 till planet P vara vinkelrät mot n. Dessutom måste n_0 vara vinkelrät mot riktningen v, som är parallel mot P_0. För att hitta en vektor som är vinkelrätt mot båda n och v, kan vi t ex ta kryssprodukten av n och v:

$$n_0 = n \times v = (4, -2, 1).$$

En ekvation till det sökta planet P_0 blir då t ex

$$4 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1) = 4x - 2y + z - 3 = 0.$$