KTH, Matematik

Lösning till lappskrivning 2, rosa version, Linjär algebra SF1604, CDATE1

1. Bestäm samtliga värden på det reella talet $\lambda \in \mathbb{R}$ för vilka följande matris A är inverterbar:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \lambda & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$
Lösning: Vi börjar med att beräkna matrisens determinant: Vi utvecklar A efter tredje rad och får
$$\det(A) = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Om vi nu utvecklar den sista 3×3 matris efter den andra rad får vi
$$\det(A) = 3 \cdot \left[\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = 3(\lambda - 2).$$
Matrisen A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$, alltså om och endast om $\lambda \neq 2$.

2. Låt $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 1, 0)$ och $C = (0, 2, 1)$ vara tre punkter i $\mathbb{R}^3$. Hitta en ekvation för planet P som innehåller punkterna A, B och C, och bestäm om planet P inhåller punkten $A + B + C$.
Lösning: Vektorer
$$v = B - A = (3, 1, 0) - (1, 1, 2) = (2, 0, -2)$$
och
$$w = C - A = (0, 2, 1) - (1, 1, 2) = (-1, 1, -1)$$
är parallel till planet P. Därmed är deras kryssprodukt
$$v \times w = (2, 4, 2)$$
vinkelrätt till planet. Då $2 \cdot (1, 2, 1) = (2, 4, 2)$ är vektoren $n = (1, 2, 1)$ också normal till planet P, och eftersom $A = (1, 1, 2)$ tillhör planet är planets ekvation
$$1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 2) = x + 2y + z - 5 = 0.$$

Punkten $A + B + C = (4, 4, 3)$ uppfyller inte planets ekvation:

$$4 + 2 \cdot 4 + 3 - 5 = 10.$$

Därmed tillhör $A + B + C$ inte planet P.